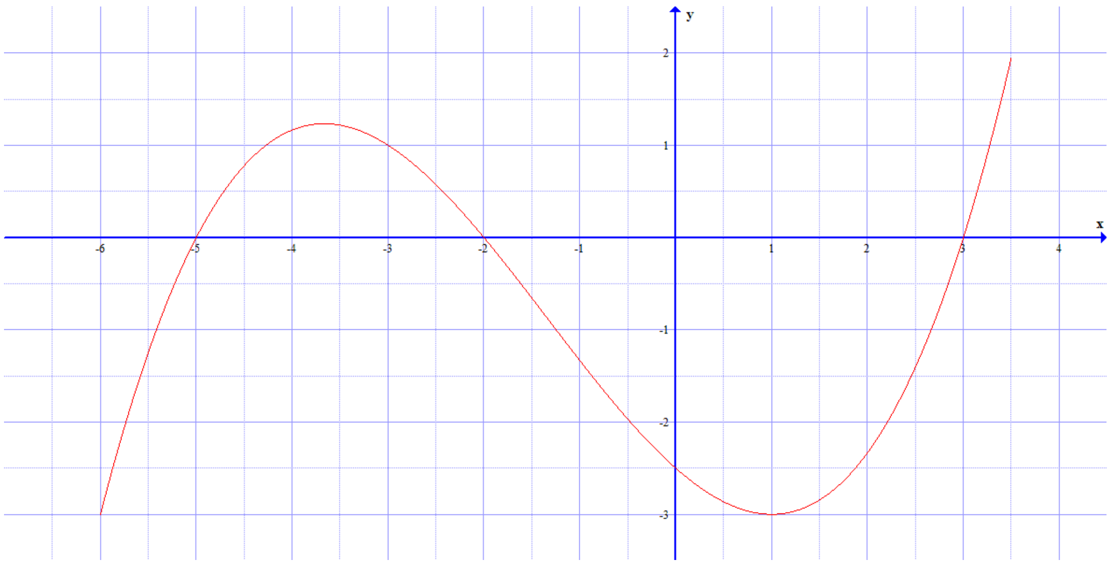
Fonctions (Le grand Quizz)

1 Généralités - Vocabulaire de base

1.1 Aspect graphique

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f.



1. L'ensemble de définition D de f est :

   ☐ $[-6; 3,5]$; ☐ $[-3; 2]$; ☐ $[-3; 3,5]$; ☐ $]-\infty; 2]$.

2. L'image de 0 par f est :

   ☐ -2 ; ☐ $-5,\ -2,$ et 3 ; ☐ $-2,5$; ☐ 3.

3. Donnez le nombre d'antécédent(s) de 0 par f :

   ☐ 0 ; ☐ 1 ; ☐ 2 ; ☐ 3.

4. Donnez la valeur du ou des antécédent(s) de 0 par f.

5. Les solutions de l'équation $f(x) \geq 0$ sont :

   ☐ $[-6; -5] \cup [3; 3,5]$; ☐ $[-3,5; 1]$; ☐ $[-5; -2] \cup [3; 3,5]$; ☐ $]-6; 2]$.

6. Dressez le tableau de variations de f avec la précision permise par le graphique.

7. Donnez un réel qui a exactement :
   - aucun antécédent par f
   - un antécédent par f
   - deux antécédents par f
8. Résoudre l'équation $f(x) = -1$ puis l'inéquation $f(x) \leq -1$ avec la précision permise par le graphique.

9. Tracez la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 2$ et déterminez les solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$ avec la précision permise par le graphique.

1.2 Aspect calculatoire

Ici, pas de graphique ! Tout ce qui a été fait précédemment est revu à travers le calcul.

On se donne ici la fonction f définie sur $D = [-6; 5]$ par $f(x) = x^2 + x - 1$.

1. L'image de -3 par f est égale à :

   ☐ 11 ; ☐ -11 ; ☐ 5 ; ☐ 4.

2. L'image de $\sqrt{2}$ par f est égale à :

   ☐ $1 - \sqrt{2}$; ☐ $2 + 2\sqrt{2}$; ☐ $\sqrt{2} - 1$; ☐ $1 + \sqrt{2}$.

3. 7 n'a pas d'image par f :

   ☐ Vrai ; ☐ Faux.

4. $f(x)$ peut aussi s'écrire :

   ☐ $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$; ☐ $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1$; ☐ $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}$.

5. -1 a pour antécédent(s) par f :

   ☐ aucun ; ☐ 0 et -1 ; ☐ 0 -1 et 1 ; ☐ une infinité d'antécédents.

6. 0 a pour antécédent(s) par f :

   ☐ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; ☐ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; ☐ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$;

7. 5 a pour antécédent(s) par f :

   ☐ 2 et -3 ; ☐ 2 ; ☐ -2 et -3 ; ☐ aucun antécédent.

8. Dressez le tableau de variations de f en reconnaissant à quel type de fonction vous avez affaire.

2 Variations d'une fonction - extrema

Dans tout ce paragraphe, f désigne une fonction définie sur D et I est un intervalle inclus dans D.

Définition : On dit qu'une fonction f est :

1. **strictement croissante** sur I si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$.
2. **strictement décroissante** sur I si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) > f(x_2)$.
3. **constante** sur I si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I, on a $f(x_1) = f(x_2)$.

Remarque : Dire qu'une fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I ne signifie rien d'autre que lorsque les abscisses augmentent, les images de celles-ci augmentent (resp. diminuent) aussi.
Ainsi, une fonction croissante conserve l'ordre ; une fonction décroissante inverse l'ordre.

Exercice : Dessinez ci-dessous sur deux graphiques différents la courbe représentative d'une fonction strictement croissante et celle d'une fonction strictement décroissante.

Définition :

1. On dit que m est un **minimum global** de f sur D s'il existe un réel $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) = m$ et si pour tout réel $x \in D, f(x) \geq m$.
2. On dit que M est un **maximum global** de f sur D s'il existe un réel $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) = M$ et si pour tout réel $x \in D, f(x) \leq M$.

Remarque : on a aussi les notions de minimum local et de maximum local dont nous vous laissons (intuitivement) découvrir les définitions.

Exercice : Tracer une fonction définie sur $[-3; 3]$ qui admet -2 comme minimum local (mais pas global) et 3 comme maximum local (mais pas global).

3 Fonctions de référence

On rappelle dans cette section les principales fonctions que vous avez rencontrées jusqu'ici.

3.1 Les fonctions affines

Définition : On appelle **fonction affine** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont des réels.

Variations d'une fonction affine : Une fonction affine est :
- strictement croissante si $a > 0$,
- constante si $a = 0$,
- strictement décroissante si $a < 0$.

Remarque : La courbe représentative d'une fonction affine est une droite non verticale.

Exercice : Dans le cas où $a \neq 0$, prouvez que 0 admet un unique antécédent et donnez sa valeur. En déduire le signe de $f(x) = ax + b$ en fonction du signe de a sous la forme d'un tableau.

Applications : Dressez le tableau de variations, le tableau de signes et tracez la courbe représentative des fonctions affines définies par :

1. $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 4$
2. $g(x) = -2x + 5$

Exercice : Étudiez le signe des expressions suivantes :

1. $f(x) = (3x - 4)(-2x + 7)$
2. $g(x) = \dfrac{8x + 5}{6x + 2}$

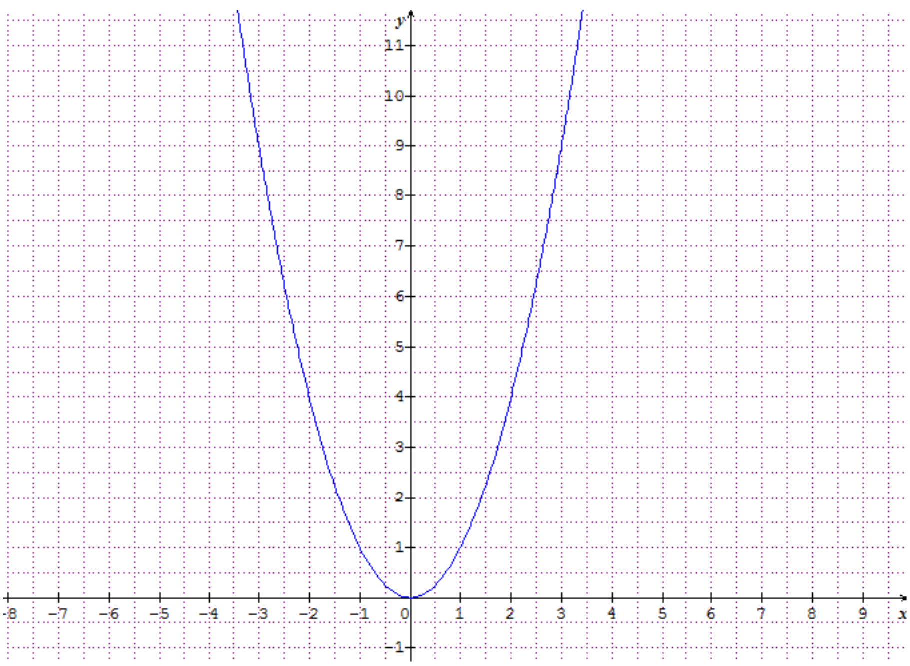
3.2 La fonction carrée

Définition : La **fonction carrée** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Définition : La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une **parabole**.

Propriétés :

1. Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, autrement dit, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
3. f a pour minimum global 0 en $x = 0$.



Théorème : Soit k un nombre réel.

1. Si $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'a aucune solution.
2. Si $k = 0$, l'équation $x^2 = k$ a une unique solution : $x = 0$.
3. Si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ a deux solutions distinctes : $x = \sqrt{k}$ ou $x = -\sqrt{k}$.

Exercice : Résoudre par le calcul les équations suivantes :

1. $x^2 = 5$
2. $x^2 = -3$
3. $(3x - 1)^2 = 16$
4. $25x^2 = 4$
5. $3x^2 = 2$

Théorème : Soit k un nombre réel strictement positif.

1. $x^2 \leq k$ si et seulement si $-\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$
2. $x^2 \geq k$ si et seulement si $x \leq -\sqrt{k}$ ou $x \geq \sqrt{k}$

Exercice : résoudre l'inéquation $(4x + 5)^2 \leq 36$ et l'inéquation $(3x - 7)^2 \geq 2$.

3.3 Les fonctions polynômes de degré 2

Définition : On appelle **fonction polynôme de degré 2** (ou **fonction trinôme**) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$.

Théorème et définition : Toute fonction trinôme peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, appelée **forme canonique** de f. On a $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Remarques :
- La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$.
  Si $a > 0$ la parabole a la forme d'un $\cup$; si $a < 0$, la parabole a la forme d'un $\cap$.
- $\mathcal{C}$ a pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = \alpha$.
- La courbe représentative d'une fonction trinôme se déduit de celle de la fonction carrée par des transformations géométriques simples (sera revu dans le chapitre spécifique au second degré)

Exercice : Dressez le tableau des variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$
2. $g(x) = \dfrac{-2}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 1$

Exercice : Écrire sous forme canonique les trinômes

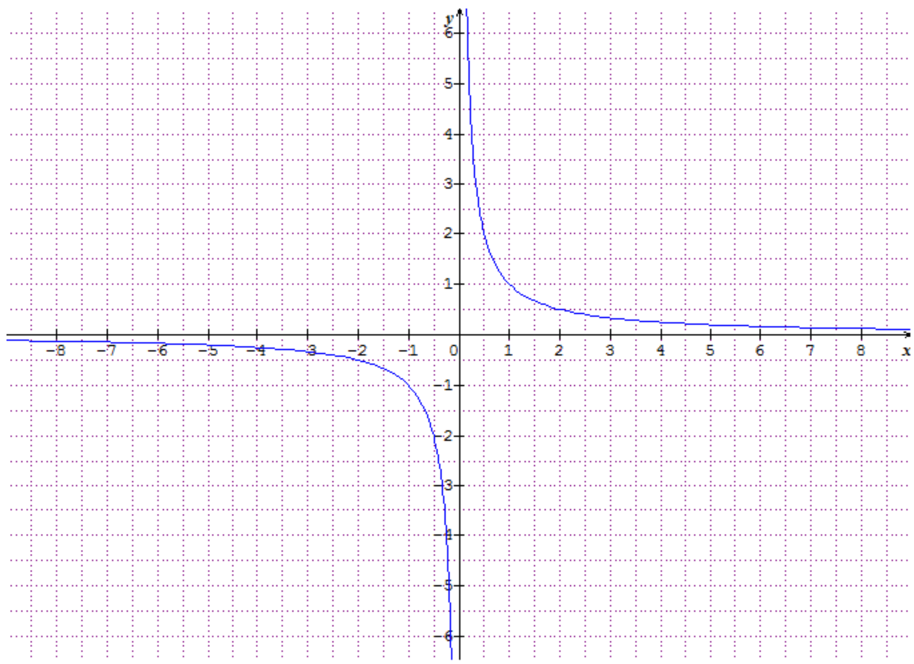
1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
2. $g(x) = x^2 + 6x + 8$
3. $h(x) = 2x^2 + 4x + 3$

3.4 La fonction inverse

Définitions : La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ s'appelle une **hyperbole**.

Propriétés :

1. Pour tout réel x non nul, $f(-x) = -f(x)$. Autrement dit, la courbe représentative de f a pour centre de symétrie l'origine O du repère.
2. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.



Exercice : Résoudre les équations ou inéquations suivantes

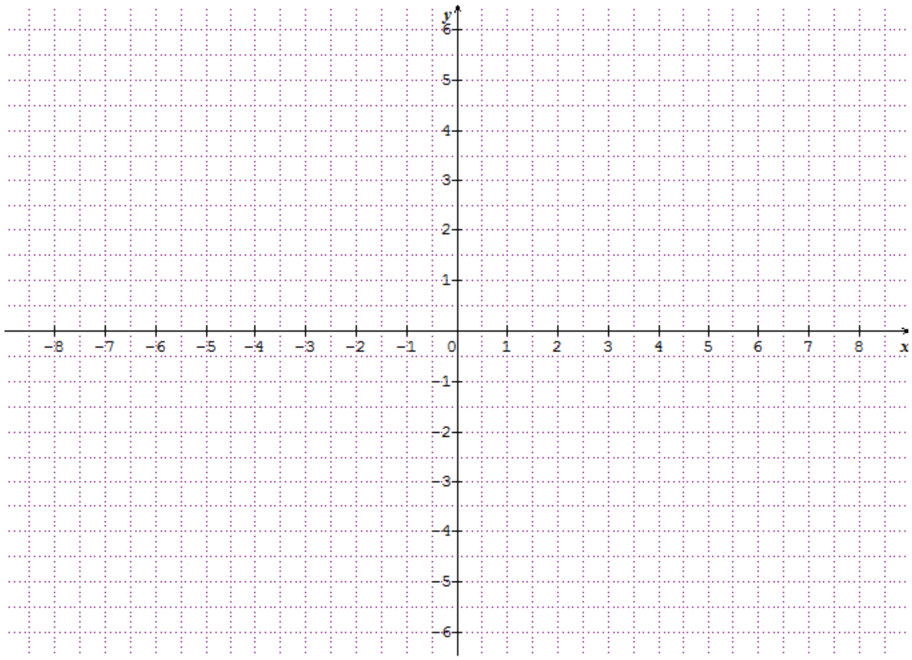
1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = -2$
3. $f(x) > -1$
4. $f(x) \leq \dfrac{3}{4}$

3.5 Les fonctions homographiques

Définition : Soient a, b, c, d des réels et f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. On suppose $ad - bc \neq 0$. f est appelée **fonction homographique**.

Exercice : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x-3}$.

1. Précisez l'ensemble de définition de f.
2. Dessinez la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.
3. Quelle propriété de symétrie semble posséder $\mathcal{C}$?



Propriétés :

1. f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
2. Si $ad - bc < 0$, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{d}{c}\right[$ et sur $\left]-\dfrac{d}{c}; +\infty\right[$ (admis pour le moment).
3. Si $ad - bc > 0$, f est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{d}{c}\right[$ et sur $\left]-\dfrac{d}{c}; +\infty\right[$ (admis pour le moment).
4. $\Omega\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$ est centre de symétrie pour $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f (admis).

Exercice : Distinguez tous les cas possibles pour lesquels $ad - bc = 0$ avec juste deux coefficients nuls simultanés et tracez l'allure des courbes représentatives de f. Vous pourrez utiliser un logiciel de géométrie dynamique.