Probabilités conditionnelles

Première - spécialité maths

11 février 2024

Table des matières

Prérequis
Le lecteur - la lectrice - de ce document est censé connaître les notions élémentaires de probabilités acquises au cours des classes de troisième et de seconde :

— le vocabulaire usuel des probabilités et sa traduction ensembliste : univers, événement, événement élémentaire, événement certain, événement impossible, événement contraire, etc.
— les règles de calcul concernant les événements et les arbres de probabilités.
— une (petite) habitude de la simulation de situations aléatoires à l'aide du logiciel Python.

Le but de ce cours est de faciliter l'expression de situations aléatoires en les modélisant de manière efficace et de se rendre compte qu'un supplément d'information au cours d'une expérience aléatoire permet dans la plupart des cas de recalculer la probabilité de réalisation d'un événement donné.
Ces mots vous semblent théoriques ? Alors passons à la pratique !

1 Probabilités conditionnelles

De la sueur coulait en abondance sur le front de Lino et Sami. Un jet, un seul petit jet de dés allait décider de leur sort dans quelques secondes. La terrible Suzy n'aimait pas que l'on manque à sa parole. Une date de créance, c'est une date, et ça se respecte ! Ni avant, ni après, le jour même ! Le marché était simple : chacun à leur tour Lino et Sami allaient lancer deux dés honnêtes (comme Suzy !). Si la somme des numéros obtenus était supérieure ou égale à 10, ils en étaient quitte pour un report d'une semaine, sinon . . .couic !
Lino avait vite calculé leurs chances de sursis. Faire dix ou plus , c'est obtenir l'un des événements suivants : $\{(4;6),(6;4),(5;5),(5;6),(6;5),(6;6)\}$ sur les 36 lancers possibles des deux dés. Ils avaient donc une chance sur six de s'en sortir.
Sami s'y risqua en premier. Sarino l'homme de main de Suzy lui déclara un rictus à la bouche : "Ton premier dé a amené 2, t'as pigé ?". Sami devint livide. Avec cette information, la probabilité de faire au moins dix était devenue nulle, et donc celle de finir au fond des eaux troubles

du Lez certaine !
Lino se lança à son tour, les yeux fermés. Sarino, l'air malicieux déclara : "Ton premier dé a amené 6". Lino pensa alors : "Ok ! Ok ! Garde ton calme mon vieux Lili, t'as eu un 6, donc si ton autre dé a amené 4, 5 ou 6, t'es sauvé ! Ca te fait donc une chance sur deux de sursis".
Sarino, lentement, avec une patience réfléchie, dévoila alors la face supérieure du second dé :
Et ce fut la ruine de 3 !

Une situation de ce type prouve clairement que si une *information supplémentaire* est donnée au cours du déroulement de l'expérience aléatoire, alors la probabilité qu'un événement donné se réalise "change", dans le sens où nous changeons de mesure de probabilité.
Si l'on note A : "La somme des deux dés amène un total supérieur ou égal à 10", on a sous l'hypothèse d'équiprobabilité $P(A) = 1/6$.
Notons B l'événement : "Le premier dé a amené 2". Connaissant cette information, nous lirons probabilité que A se réalise sachant que B est réalisé et nous noterons $P_B(A) = 0$.
De même, notons C l'événement : "Le premier dé a amené 6". Connaissant cette information, nous lirons probabilité que A se réalise sachant que C est réalisé et nous noterons $P_C(A) = 1/2$.
Les applications P_B et P_C sont des mesures de probabilité sur Ω (construites à partir de P).

1.1 Comprendre la définition de probabilité conditionnelle

Exemple 1 (tableau de contingence) : On a interrogé 1200 personnes partant en vacances. L'enquête leur a demandé leur lieu de séjour (la mer, la montagne ou la campagne) et leur classe d'âge : "Junior" (moins de 35 ans) ou "Sénior" (plus de 35 ans). Les résultats sont tombés :

- 45% des personnes interrogées ont moins de 35 ans.
- 22% des personnes interrogées préfèrent la campagne.
- Parmi les moins de 35 ans, 310 préfèrent la mer et 120 préfèrent la montagne.
- Parmi les 35 ans et plus, 180 préfèrent la montagne.

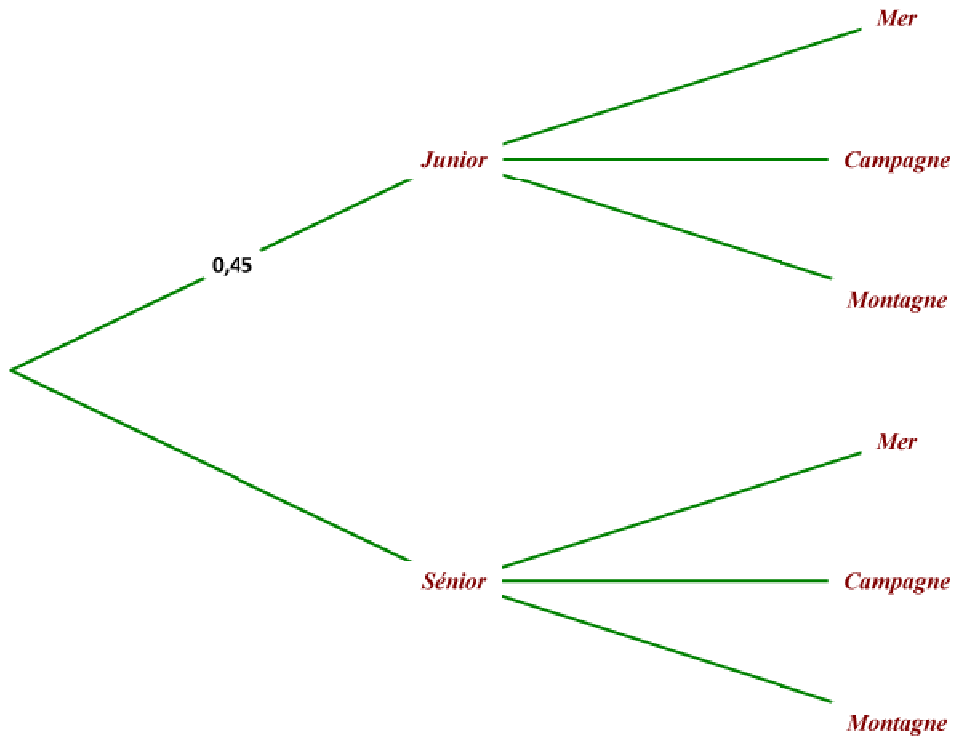
1. Complétez alors le tableau à double-entrées qui suit :

	Mer	Campagne	Montagne	Total
Junior				
Sénior				
Total				1200

2. Transformez le tableau d'effectifs précédent en un tableau de probabilités.
(a) Comment interprétez-vous la probabilité écrite dans une case autre que celle où "Total" apparait en ligne ou en colonne ?
(b) Parmi les parsonnes ayant moins de 35 ans, quel est le pourcentage de celles qui préfèrent la montagne ?

	Mer	Campagne	Montagne	Total
Junior				
Sénior				
Total				1

3. Nous allons créer un arbre de probabilités correspondant à une partition initiale de la population (les 1200 personnes interrogées) en "Junior" et en "Sénior".
En utilisant le tableau de contingence 1 ou 2, complétez l'arbre de probabilités donné à la page suivante. Les probabilités seront données sous forme de fractions.



(a) Interprétez la probabilité sur le segment reliant l'événement "Sénior" à l'événement "Mer".
(b) Calculez et interprétez la probabilité de la branche reliant les événements "Sénior" et "Mer".
(c) On choisit au hasard une fiche parmi les 1200 réponses. Quelle est la probabilité de tomber sur une personne préférant la campagne ?
(d) Est-il plus probable de tomber sur un junior préférant la montagne que sur un sénior préférant la campagne ?
(e) L'arbre vous donne-t-il directement la probabilité de préférer la campagne sachant que l'on est sénior : $P_{\text{"Sénior"}}(\text{"Campagne"})$ ou la probabilité d'être sénior sachant qu'on préfère la campagne : $P_{\text{"Campagne"}}(\text{"Sénior"})$?
Le tableau de contingence vous permet-il de répondre aux deux questions ?

4. Il est temps de relier les deux approches "tableau de probabilités" et "arbre de probabilités". Cette conjonction nous permet de découvrir la *formule des probabilités totales* et la *formule des probabilités composées.*

   L'arbre de probabilités nous permet de dire que :

   — $P(\text{"Junior"} \cap \text{"Mer"}) = P(\text{"Junior"}) \times P_{\text{"Junior"}}(\text{"Mer"})$
   — $P(\text{"Sénior"} \cap \text{"Mer"}) =$

   Le tableau de contingence nous permet de dire que :

   $P(\text{"Mer"}) = P(\text{"Junior"} \cap \text{"Mer"}) + P(\text{"Sénior"} \cap \text{"Mer"})$
   D'où :
   $P(\text{"Mer"}) =$

5. Créez un arbre de probabilités correspondant à une partition initiale de la population (les 1200 personnes interrogées) en "Mer", "Campagne" et en "Montagne".

Exemple 2 : Dans une certaine population, 25% des individus ont les yeux clairs. Parmi ceux-ci, 45% sont des hommes. Parmi les individus aux yeux foncés, il y a 60% de femmes.

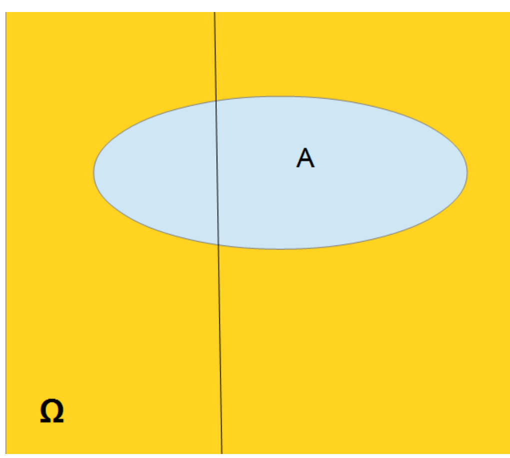
1. Construisez un arbre de probabilités illustrant les données du texte. On notera A l'événement : "avoir les yeux clairs" et B l'événement : "être une femme".
2. On choisit au hasard un individu de cette population. Calculez la probabilité que :
   (a) L'individu choisi soit un homme.
   (b) L'individu choisi soit un homme aux yeux clairs.
   (c) L'individu choisi ait les yeux clairs.
   (d) L'individu choisi soit une femme aux yeux foncés.
3. L'individu choisi est une femme. Peut-on à l'aide de l'arbre, calculer la probabilité qu'elle ait les yeux clairs ?
4. Construisez un tableau de contingence associé à l'arbre précédent. Répondez alors à la question précédente.
5. Précisez $P_B(A)$ en fonction de $P_A(B)$ (c'est la *formule de Bayes*).

Synthétisons ce que nous apprend ce dernier exemple :
L'univers Ω est partitionné en deux événements A et $\bar{A}$: $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
On peut aussi considérer que l'univers Ω est partitionné en deux événements B et $\bar{B}$: $B \cup \bar{B} = \Omega$ et $B \cap \bar{B} = \emptyset$: observez le tableau de contingence.

Nous avons $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ et $P(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$ par équiprobabilité.

Supposer que l'événement A est réalisé (c'est donc notre information supplémentaire), c'est faire comme si l'on avait partitionné A (et non plus Ω) en $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \quad \text{(réunion disjointe)}$$



La probabilité que B soit réalisé, sachant que A l'est, que nous noterons $P_A(B)$, est égale à $P_A(B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$, soit, si l'on fait intervenir notre univers Ω :

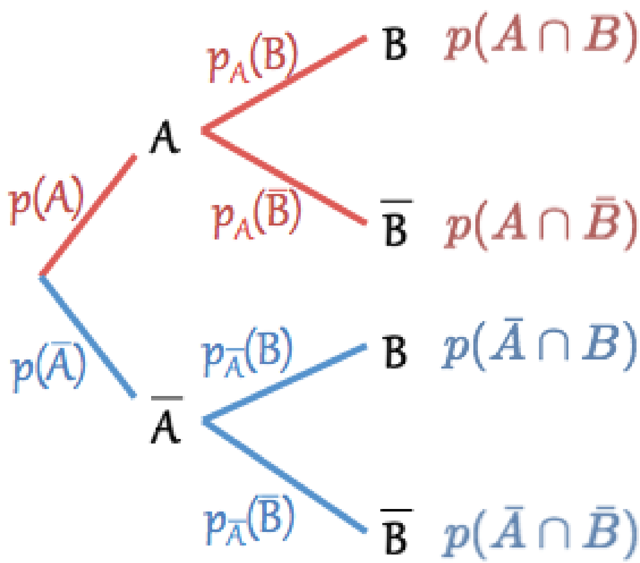
$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} = \frac{\text{Card}(A \cap B)/\text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(A)/\text{Card}(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Notons par ailleurs que les probabilités conditionnelles apparaissent naturellement dans les branches secondaires des arbres de probabilités.

Dans toute la suite, les événements considérés seront assimilés à des parties de l'univers Ω (ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire donnée). Cet univers sera lui-même muni de la probabilité uniforme.

Définition 1 : Soit A et B deux événements liés à une expérience aléatoire d'univers fini Ω. On suppose que $P(A) > 0$. On appelle probabilité que B soit réalisé, *sachant que* A l'est, le réel de $[0; 1]$ noté $P_A(B)$ et défini par : $\boxed{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$.

P_A définit une nouvelle probabilité de Ω dans $[0; 1]$ appelée *probabilité conditionnelle sachant* A. Elle quantifie la réalisation de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé. Tout ce qui sort du périmètre de A n'est plus comptabilisé pour calculer la probabilité de réalisation de B.



1.2 Formule des probabilités composées et des probabilités totales

La formule des probabilités composées n'est rien d'autre que la traduction de la propriété bien connue : "la probabilité d'une branche d'un arbre est égale au produit des probabilités des segments qui la constituent".

Formule des probabilités composées :

1. Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, on a : $P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$,
2. Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots A_n}(A_{n+1})$$

Définition 2 : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou infinie dénombrable) d'événements deux à deux disjoints et telle que $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un *système complet d'événements*.

Formule des probabilités totales : Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements, avec pour tout $i \in I$ $P(A_i) > 0$ (I fini ou infini dénombrable). On a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

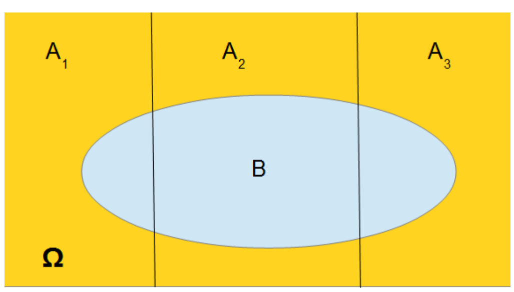
C'est un résultat très important dans la pratique. Dans les classes du secondaire, on l'applique en se basant sur un arbre de probabilités : on additionne les probabilités des branches de l'arbre passant par les A_i et de terminaison B.
Dans de nombreux cas, il convient de choisir un système complet d'événements adapté au problème que l'on souhaite résoudre, en se basant bien sûr sur les informations dont on dispose.

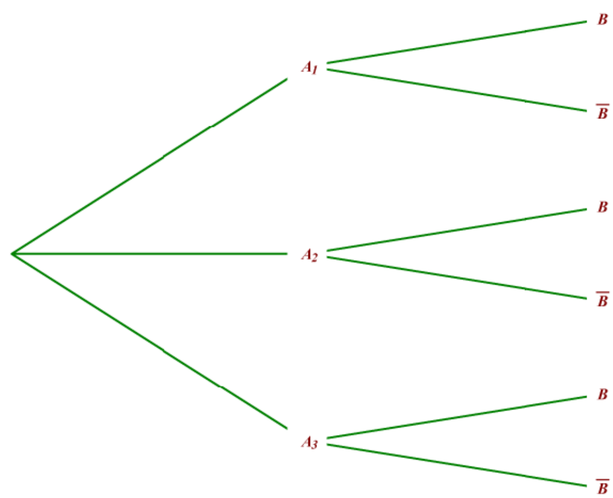
Dans la figure ci-dessous, $\{A_1; A_2; A_3\}$ est un système complet d'événements. Pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

c'est-à dire, en utilisant la formule des probabilités composées :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)$$





Exemple 3

1. Vous êtes placé(e) devant deux urnes dont vous ne pouvez voir le contenu. La première contient 3 pièces d'or et 5 pièces d'argent ; la seconde contient 1 pièce d'or et 6 pièces d'argent. Vous choisissez au hasard une urne. Quelle est la probabilité de tirer une pièce d'or ?
2. On considère une urne contenant 7 boules bleues et 3 boules rouges toutes indiscernables au toucher. On tire une boule de cette urne. Si elle est bleue, on la remet dans l'urne ; si elle est rouge, on la remplace par 5 boules blanches prises dans une réserve auxiliaire. On tire alors une deuxième boule de cette urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit bleue ?
3. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement 3 boules blanches et 2 boules noires (resp. 2 boules blanches et 2 boules noires). On tire une boule de l'urne U_1 et on la place dans U_2. On tire alors une boule de U_2 et on la place dans U_1. Quelle est la probabilité que les deux urnes aient gardé la même composition ?

2 Formule de Bayes - Indépendance

Nous avons vu précédemment que si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$.
Imaginons que nous connaissions $P_A(B)$ et que nous voulions connaître $P_B(A)$. Nous avons : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$ par la formule des probabilités composées.
Or $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$ par la formule des probabilités totales. D'où :

Formule de Bayes : Soient A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)}}$$

Il ne s'agit pas d'apprendre par coeur cette formule, mais de savoir la retrouver et l'appliquer selon le contexte donné.

Exemple 4

1. Á Las Vegas, il y a 25% de tricheurs aux cartes. Un tricheur est sûr de retourner un as si on lui présente un jeu de 52 cartes. On croise au hasard un joueur dans la rue et on lui demande de tirer une carte dans un jeu de 52 cartes. Il tire un as. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?
2. On reprend la question 1 de l'exemple 3. On tire une pièce d'or. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la seconde urne ?

Remarque : On appelle parfois la formule de Bayes la ***formule de probabilité des causes***. Dans l'exemple précédent (celui des urnes), il y a deux niveaux de hasard : le premier (choix de l'urne) est souvent appelé "*cause*" et le second (choix d'une pièce) est appelé "*conséquence*". Nous avons calculé la probabilité conditionnelle de la cause : "provenir de l'urne 2" sachant la conséquence : "la pièce est en or".

Définition 3 : On dit que deux événements A et B sont ***P-indépendants*** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Attention : Ne pas confondre indépendance, notion définie à partir de la probabilité P, avec incompatibilité, où P n'intervient pas !

Remarque : Dire que deux événements A et B de probabilités non nulles sont ***P-indépendants*** signifie que $P_A(B) = P(B)$ ou que $P_B(A) = P(A)$. En effet, d'après la formule des probabilités composées on a TOUJOURS $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. Mais rien n'assure que $P_A(B) = P(B)$. C'est le cas si l'information "A est réalisé" n'apporte rien de plus sur la réalisation de B.

Propriété : Le propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A et B sont indépendants.
2. $\bar{A}$ et B sont indépendants.
3. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Exemple 5 : Les événements A et B sont-ils indépendants dans les cas suivants ?

1. A : "tirer un roi" et B : "tirer un pique" dans un jeu de 52 cartes.
2. A : "obtenir une somme supérieure ou égale à 10" et B : "obtenir un doublet de chiffres pairs" dans le lancer de 2 dés parfaits.

3 Exercices et problèmes

Les exercices qui suivent sont dans la mesure du possible, classés par ordre croissant de difficulté. Vous devrez souvent modéliser les situations par un arbre de probabilités. Retenez que lors de la présentation des calculs, **il vous faudra rédiger parfaitement l'utilisation des formules** des probabilités totales / composées, **même si cela "se voit" sur l'arbre !**

Exercices d'application directe

Exercice 1 : Trois usines A, B et C produisent des pièces dont les proportions de défectueux sont respectivement 1%, 3% et 1,5%. Un magasin reçoit des pièces de chacune de ces usines en proportions respectives 40%, 50% et 10%. Une fois les pièces mélangées et stockées, le gérant en prélève une au hasard.

1. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Calculez la probabilité près de :
   (a) tomber sur une pièce de l'usine C.
   (b) tomber sur une pièce non défectueuse provenant de l'usine A.
   (c) tomber sur une pièce défectueuse provenant de l'usine B ou sur une pièce non défectueuse provenant de l'usine C.
   (d) tomber sur une pièce défectueuse.
3. La pièce prélevée est défectueuse. Calculez la probabilité qu'elle provienne de l'usine B.

Exercice 2 : Une urne contient neuf jetons rouges dont un est marqué "gagnant" et six jetons verts dont deux sont marqués "gagnant". On tire au hasard un jeton de cette urne et on note les événements :

— R :"le jeton tiré est rouge",
— V :"le jeton tiré est vert",
— G :"le jeton tiré est gagnant".

1. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Calculez la probabilité de tomber sur un jeton vert marqué gagnant.
3. Calculez la probabilité de tomber sur un jeton gagnant.
4. Le jeton est marqué gagnant. Calculez la probabilité que ce soit un jeton rouge.
5. on tire successivement *avec remise* deux jetons de cette urne : chaque jeton vert gagnant rapporte 2€, chaque jeton rouge rapporte 5€ et chaque jeton (rouge ou vert) non marqué fait perdre 1€. On appelle X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique à ce jeu.
   (a) Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   (b) Précisez les valeurs prises par X (que l'on notera $x_1,\ x_2,\dots$) et la probabilité de prendre chacune de ces valeurs sous la forme d'une fraction. On résumera ceci dans un tableau appelé *loi de probabilité* de X.
   (c) Calculez le gain moyen à ce jeu.
6. même question que précédemment, mais en supposant le tirage *sans remise*.

Exercice 3 : Une urne contient 6 boules blanches, 3 boules bleues, 4 boules rouges et 5 boules noires toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne.

1. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2. Calculez la probabilité de tomber sur 3 boules bleues.
3. Calculez la probabilité de tomber sur 3 boules de même couleur.
4. Calculez la probabilité de tomber sur 3 boules de couleurs différentes.
5. On gagne 50€ si notre tirage est unicolore, 20€ si nous avons deux boules bleues seulement, et on perd 10€ sinon. Quel est le gain moyen à ce jeu ?

Exercice 4 : Une pandémie sévit dans une certaine région du globe. Un test de dépistage est disponible pour celle-ci, mais n'est pas fiable à 100%. Nous cherchons à déterminer si un individu prélevé au hasard dans la population est sain ou malade à l'aide de ce test.

Nous supposons que la probabilité pour un individu donné d'être malade est de 0,005. La **sensibilité** (Se) est la probabilité qu'un test réalisé sur une personne malade se révèle positif ; autrement dit, que le test soit positif sachant que la personne est malade. La **spécificité** (Sp) est la probabilité qu'un test réalisé sur une personne saine se révèle négatif ; autrement dit, que le test soit négatif sachant que la personne n'est pas malade. On note VP (resp. VN) la probabilité d'avoir un vrai positif (resp. un vrai négatif) et FP (resp. FN) la probabilité d'avoir un faux positif (resp. un faux négatif).

1. La sensibilité d'un test est égale à :
   (a) $\frac{VP}{VP+VN}$ (b) $\frac{VP}{FP+VN}$ (c) $\frac{VP}{VP+FN}$ (d) $\frac{VP}{FP+FN}$
2. la spécificité d'un test est égale à :
   (a) $\frac{VN}{VP+VN}$ (b) $\frac{VN}{FP+VN}$ (c) $\frac{VN}{VP+FN}$ (d) $\frac{VN}{FP+FN}$
3. La sensibilité du test est estimée à 0,997. La probabilité qu'un individu aléatoire soit testé positif et soit malade est de :
   (a) 0,0997 (b) 0,0499 (c) 0,00499 (d) 0,0055
4. La probabilité qu'un individu aléatoire soit testé négatif et soit sain est de 0,9552. La spécificité du test est de :
   (a) 0,094 (b) 0,96 (c) 0,0095 (d) 0,9755
5. Un laboratoire effectue ce test sur 10 individus indépendants choisis aléatoirement.
   (a) La probabilité qu'un individu donné soit déclaré sain à l'issue d'un test est égale à :
   (a) 0,005 (b) 0,0448 (c) 0,995 (d) 0,9552
   (b) La probabilité qu'au moins un individu soit déclaré malade à l'issue des 10 tests est égale à :
   (a) 0,0489 (b) 0,3677 (c) 0,6323 (d) 0,1385

<u>Exercices de niveau intermédiaire</u>

Exercice 5 : vraie information ou pas ?
Ma femme a les yeux clairs. Mes parents ont les yeux foncés mais ma soeur a les yeux clairs. On admet pour simplifier que le gêne clair est récessif et le gêne foncé dominant.

1. Sachant que j'ai les yeux foncés, quelle est la probabilité que ma fille ainée Juliette ait les yeux clairs ?
2. Juliette a les yeux clairs. Quelle est la probabilité que son petit frère Gildas ait aussi les yeux clairs ?
3. Même question en supposant que Juliette a les yeux foncés.

Exercice 6 : On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,; 80]$.

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Exercice 7 : Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

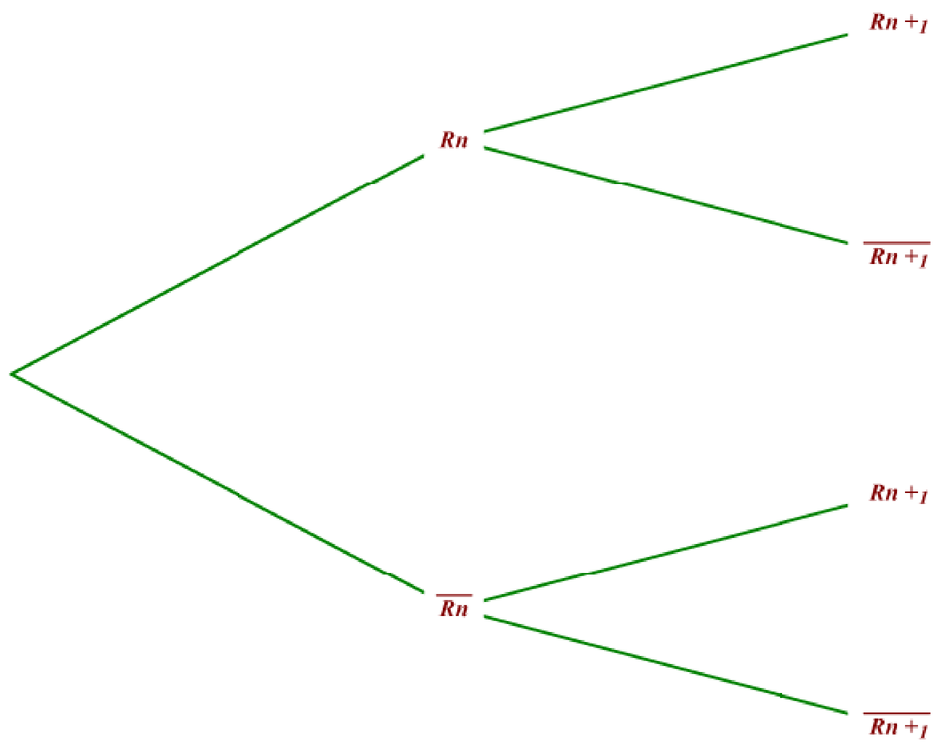
1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
   On considère les évènements suivants :
   — D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   — E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   — E_2 : « Le candidat est recruté ».
   (a) Modélisez la situation par un arbre de probabilités.
   (b) Calculer la probabilité de l'évènement E_1.
   (c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.
2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

   Calculer la probabilité qu'au moins un des cinq amis soient recruté. On arrondira à 10^{-3}.
3. Quel est le nombre minimum N de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$? Vous pourrez utiliser l'outil TICE pour répondre à cette question.

Problème 1 : Un étudiant se rend à la faculté. S'il est à l'heure, il peut assister au cours, s'il est en retard il est refusé au cours.
Si l'étudiant est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{6}$. S'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{30}$.
Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement : "L'étudiant est en retard le jour n". On note p_n la probabilité de l'événement R_n. On suppose de plus que $p_1 = 0$.

A) Déterminons une récurrence vérifiée par la suite de terme général $\mathbf{p_n}$.

1. Complétez l'arbre de probabilités qui suit :



2. Exprimez $P(R_n \cap R_{n+1})$ et $P(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$ en fonction de p_n.
3. En déduire que $p_{n+1} = -\frac{4}{30}p_n + \frac{1}{6}$.

B) Calculons la limite de $\mathbf{p_n}$.

1. Résoudre l'équation $x = -\frac{4}{30}x + \frac{1}{6}$. On notera ℓ son unique solution.
2. On pose pour tout entier naturel n : $q_n = p_n - \ell$. Prouvez que (q_n) est une suite géométrique et exprimez q_n en fonction de n.
3. En déduire p_n en fonction de n.
4. Calculez $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Problème 2 : Une urne U_1 contient 2 boules rouges, 3 boules bleues et 5 boules vertes ; une urne U_2 contient 4 boules rouges et 5 boules bleues tandis qu'une urne U_3 contient3 boules bleues et 6 boules vertes.
On tire au hasard une boule de U_1 que l'on place dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 que l'on place dans U_3 et enfin on tire au hasard une boule de U_3 que l'on place dans U_1.

Quelle est la probabilité que la composition de l'urne U_1 n'ait pas varié à l'issue de ces trois manipulations ?

Problème 3 : Deux joueurs A et B jouent avec deux dés parfaits à 6 faces. A gagne s'il fait 7 et B gagne s'il fait 6. B joue le premier, et s'il ne gagne pas du premier coup, A et B jouent ensuite alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux joueurs gagne.

1. Modélisez la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2. Calculez alors la probabilité de succès de chacun des joueurs.
3. version féquentiste.
   (a) Écrire une fonction Partie() qui modélise une partie entre ces deux joueurs jusqu'au gain de l'un d'entre eux. La fonction renverra par exemple 1 si A gagne et 0 sinon.
   (b) Calculez la fréquence de gain des joueurs A et B sur 100000 parties. Comparez l'estimation obtenue avec le résultat théorique.

4 Rappels : Événements - Probabilité

Définition 1 :

1. On appelle *épreuve aléatoire* une expérience $\mathcal{E}$ dans laquelle on connaît tous les résultats possibles, mais dont on ne peut prévoir l'issue avec certitude.
2. On appelle *univers*, et on note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles d'une épreuve aléatoire. Un élément $\omega \in \Omega$ est appelée *issue*.

Exemples :

1. Jet d'une pièce de monnaie. $\Omega = \{\text{Pile, Face}\}$
2. Lancer d'un dé à 6 faces. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. Tirage simultané de k boules dans une urne en contenant $n \geq k$.
   $\Omega = \{\text{parties à k éléments dans un ensemble à n éléments}\}$
4. Lancer d'une fléchette vers une cible de centre O et de rayon r :
   $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\} \cup \{c\}$, où c est le point cimetière (les ratages).
5. Jet de 2 pièces de monnaie. $\Omega = \{\text{(Pile, Face), (Face,Pile), (Pile,Pile), (Face,Face)}\}$

Définition 2 : On appelle *événement* associé à une épreuve aléatoire $\mathcal{E}$ toute proposition logique, dont on peut dire, à l'issue de l'épreuve, si elle est vraie ou elle est fausse.

Remarques :

1. Nous nous sommes bien gardés de dire qu'un événement était une partie de Ω. En fait, tout événement se représente de manière unique par un sous-ensemble de Ω, mais **la réciproque est fausse** (sauf dans le cas où Ω est dénombrable). Ainsi, en général, l'ensemble des événements liés à une épreuve aléatoire est un sous-ensemble strict de $\mathcal{P}(\Omega)$. Mais au lycée, nous ne rentrerons pas dans les détails.
2. Un événement sera symbolisé par une lettre capitale : A, B, C, etc.
3. Un événement A est réalisé si le résultat ω observé appartient à A.

Exemples :

1. Jet d'une pièce de monnaie. $\Omega = \{\text{Pile, Face}\}$.
   L'événement A $= \{\text{pile}\}$ signifie que la pièce retombe en présentant le côté pile.
2. Lancer d'un dé à 6 faces. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   L'événement A : "obtenir un numéro pair" s'assimile au sous-ensemble de Ω : $A = \{2, 4, 6\}$.
   L'événement B : "obtenir 7" n'est jamais réalisé. C'est l'événement impossible, noté $\emptyset$.
   L'événement C : "obtenir un entier compris entre 1 et 6" est toujours réalisé. C'est l'événement certain. $C = \Omega$.

En tant que sous-ensembles de Ω, toutes les opérations ensemblistes sont possibles sur les événements : réunion, intersection, complémentaire, différence symétrique, etc. Les événements ainsi créés auront tous une interprétation. On peut le résumer dans le tableau suivant :

Notation	Langage ensembliste	Langage probabiliste
Ω	ensemble de référence	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
$\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$ est réalisé si A ne l'est pas
$A \subset B$	A est inclus dans B	Si A est réalisé, alors B l'est aussi
$A \cup B$	A union B	A est réalisé ou B est réalisé
$A \cap B$	A intersection B	A et B sont réalisés
$A \setminus B$	A privé de B	A est réalisé mais B ne l'est pas

Définition 3 :

1. $\overline{A}$ est appelé *événement contraire* de l'événement A.
2. On dit que deux événements A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$.

Remarque : Un événement A et son contraire sont incompatibles.
A et B sont incompatibles si et seulement si $A \subset \overline{B}$ ou si $B \subset \overline{A}$.

Définition 4 : Au niveau du lycée, on définit la probabilité de réalisation de l'événement A comme la limite de la fréquence empirique de réalisation de A au cours de N expériences aléatoires répétées dans les mêmes conditions :

$$P(A) = \lim_{N \to +\infty} \frac{n_A}{N}$$

où n_A désigne le nombre de fois où l'événement A a été réalisé au cours des N expériences.
Nous verrons ceci en détail avec la **loi faible des grands nombres**.

Propriétés : Une probabilité P vérifie :

1. $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
2. Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$.
3. Pour tout événement A : $p(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
4. Si A et B sont **incompatibles**, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. _ Ce résultat reste vrai pour n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **incompatibles deux à deux** :
$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$
5. Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Définition 5 : Une variable aléatoire réelle X est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Autrement dit, une fois connu le résultat de l'expérience, cette fonction n'a plus rien de variable, ni d'aléatoire !