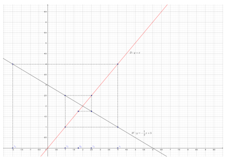


Suites numériques

Terminale Spé maths

Définition

Une suite (u_n) peut être définie :

✧ de manière explicite : $u_n = f(n)$ ou $u_n = f(n, u_n)$

✧ de manière récurrente : $\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Sens de variation

✧ Si pour tout $n, u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

✧ Si pour tout $n, u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Suites arithmétiques

Récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ (de raison r)

Explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$

Somme : nombre de termes $\times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Suites géométriques

Récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ (de raison q)

Explicite : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

Somme : premier terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

$$S_n = 1 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Raisonnement par récurrence

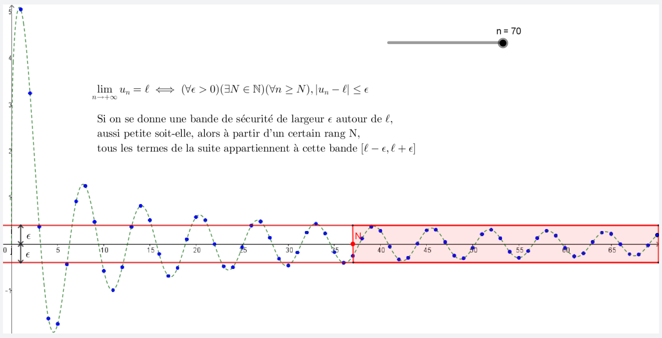
But : Prouver qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

✧ Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0

✧ Hérédité : On se donne un entier $n \geq n_0$ quelconque et on prouve que si la propriété est vraie au rang n, alors elle est encore vraie au rang $n+1$.

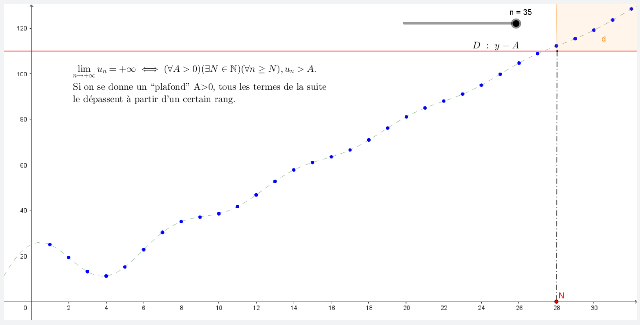
Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$

Limite finie (convergence)



Ex : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Limite infinie (divergence)



Ex : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

Théorèmes de comparaison

$(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites. Si à partir d'un rang :

✧ $u_n \leq v_n$ et que (u_n) [resp. (v_n)] converge vers ℓ [resp. vers ℓ'], alors $\ell \leq \ell'$

✧ $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

✧ $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

✧ $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Limites d'une suite géométrique

✧ Si $q \leq -1$, alors (q^n) n'a pas de limite.

✧ Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

✧ Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

✧ Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

✧ Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1}{1-q}$

Convergence / Divergence d'une suite monotone

✧ Toute suite **croissante** [resp. décroissante] et **non majorée** [resp. non minorée] tend vers $+\infty$ [resp. $-\infty$].

✧ Toute suite **croissante et majorée converge** ; toute suite décroissante et minorée converge.