Yannick Le Bastard

Bref panorama théorique sur les équations d'évolution

1 Introduction

1.1 Forme générale d'une équation d'évolution

Les équations aux dérivées partielles (EDP) apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux problèmes en physique, en biologie, en économie ou ailleurs. Sur de nombreux points, elles semblent généraliser au contexte multi-dimensionnel les équations différentielles ordinaires. Pour autant, leur étude approfondie s'avère délicate, car nécessitant l'apport de nombreuses branches des mathématiques : géométrie différentielle pour les formules de Stokes, analyse fonctionnelle, etc.

Nous présenterons dans cette section le problème général que nous serons amenés à étudier. En particulier, il sera détaillé pour différents types d'équation les résultats d'**existence** et d'**unicité**, ainsi que les propriétés importantes qui les caractérisent : continuité par rapport aux données, positivité, principe du maximum, régularité, etc. Les outils théoriques nécessaires seront soit rappelés au fur et à mesure, ou s'ils nécessitent un plus long développement, indiqués en annexe. Si plusieurs approches sont possibles pour un même type d'EDP, une seule sera détaillée, les autres citées via un lien bibliographique. Le but étant à terme, de traiter numériquement les problèmes exposés, l'approche variationnelle sera préférée à d'autres méthodes aboutissant à des résultats puissants et généraux, mais peu pratiques pour une implémentation.

Notations : Dans toute la suite X désigne un espace de Banach et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Le plus souvent, on aura $I = [0;T],\ T > 0$ ou $I = \mathbb{R}^+$. X sera souvent un espace de Hilbert, auquel cas on le notera alors H. Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou 3), de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière.

La formulation usuelle d'un problème d'évolution (équation de la chaleur, de Schrödinger, etc.) nous amène naturellement à distinguer deux types de variables jouant des rôles différents : la variable temps $t \in [0;T]$ et la variable d'espace $x \in \Omega$. Les deux problèmes précédents, comme bien d'autres s'écrivent alors sous la forme : trouver $u(t,x)$ telle que

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Au(t,x) = f(t,x) \ \text{ sur }]0;T] \times \Omega \\ \text{con dition initiale : } u(0,x) = u_0(x) \ \text{ sur } \Omega \\ \text{conditions de bord : Neumann ou Dirichlet par exemple} \end{cases}}$$

où A est un opérateur à préciser, f et u_0 sont des fonctions à préciser.

Exemples :

1. L'équation de la chaleur avec condition de Dirichlet homogène : trouver $u(t,x)$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 \ \text{ sur }]0;T] \times \Omega \\ u(0,x) = \sin(x) \ \text{ sur } \Omega \\ u(t,x) = 0 \ \text{ sur }]0;T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

   Ici $A = -\Delta,\ f = 0$ et $u_0(x) = \sin(x)$.

2. L'équation de Schrödinger avec condition de Dirichlet homogène : trouver $u(t,x)$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - i\Delta u(t,x) = 1 - x^2 \ \text{ sur }]0;T] \times \Omega \\ u(0,x) = 0 \ \text{ sur } \Omega \\ u(t,x) = 0 \ \text{ sur }]0;T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

   Ici $A = -i\Delta,\ f(t,x) = 1 - x^2$ et $u_0(x) = 0$.

On utilisera la notation classique mais importante $u(t)$ pour désigner la fonction définie sur l'ouvert Ω, à valeurs réelles $u(t,.) : x \mapsto u(t,x)$, à t fixé.
On interprète ainsi la fonction inconnue $(t,x) \mapsto u(t,x)$ comme une fonction définie sur $[0;T]$ à valeurs dans un espace de fonctions :

$$u : \begin{cases} [0;T] \to V(\Omega) \\ t \mapsto u(t) \end{cases}$$

où $V(\Omega)$ est un espace de fonctions définies sur Ω qui devra en outre contenir l'information permettant de retrouver les conditions aux bords. Dans la pratique, ce sera toujours un espace de Banach, et même un espace de Hilbert.

Exemples :

1. $\mathcal{C}^0(0;T;V(\Omega))$, l'ensemble des fonctions continues sur $[0;T]$ à valeurs dans $V(\Omega)$, muni de la norme $\|u\| = \sup_{t\in[0;T]} \|u(t)\|_{V(\Omega)}$ est un espace de Banach.
2. $L^2(0;T;V(\Omega))$, l'ensemble des (classes de) fonctions de carré intégrable sur $]0;T[$ à valeurs dans $V(\Omega)$, muni de la norme $\|u\| = \left(\int_0^T \|u(t)\|^2_{V(\Omega)}\right)^{1/2}$ est un espace de Banach.
   Remarque : On a l'identification $L^2(0;T;L^2(\Omega)) \simeq L^2(]0;T[\times\Omega)$

La forme générale d'un problème d'évolution linéaire (en temps fini) avec second membre peut s'écrire alors : Trouver u telle que

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f \quad \text{sur } [0;T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}}$$

Remarques :

— Moyennant certaines hypothèses sur l'opérateur A, la théorie de Hille-Yosida permet de traiter le problème précédent avec un cadre abstrait très général. On pourra par exemple consulter Brézis [1, commentaires du chapitre VII] ou Cazenave-Haraux [1, chapitres 3 et 4].

— On rencontre fréquemment des équations semi-linéaires du type

$$\frac{du}{dt} + Au = F(u)$$

où F est un opérateur **non linéaire** de $V(\Omega)$ dans lui-même. Voir par exemple Cazenave-Haraux [1, chapitre 4] ou chapitre 7.

1.2 Les grands types d'équation d'évolution

1.2.1 Problèmes paraboliques du second ordre

Définition : On dit qu'un opérateur $\mathcal{L}$ est **elliptique** (resp. **uniformément elliptique**) du second ordre s'il agit sur des fonctions u de la manière :

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\partial_i u + c(x)u$$

avec $(a_{ij}(x))_{i,j}$ une matrice à coefficients bornés, vérifiant la condition d'ellipticité (resp. d'uniforme ellipticité) :

$$(\forall x \in \Omega)(\forall \xi_i, \xi_j \in \mathbb{R}^N) \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0$$

$$\left(\text{resp. } (\exists\alpha > 0)(\forall x \in \Omega)(\forall \xi_i, \xi_j \in \mathbb{R}^N) \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2\right)$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^N$.

Cas particuliers : équations linéaires, semi-linéaires et quasi-linéaires :
Ce sont les problèmes d'évolution du type :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \mathcal{L}u = f \quad \text{(linéaire)} \\ \dfrac{du}{dt} - \mathcal{L}u = \ F(u) \quad \text{(semi-linéaire)} \\ \dfrac{du}{dt} - \mathcal{L}u = \ F(u, \nabla u) \quad \text{(quasi-linéaire)} \end{cases}$$

où $\mathcal{L}$ est un opérateur elliptique du second ordre. Attention, comme le temps t intervient, la matrice (a_{ij}) dépend aussi de t : $a_{ij} = a_{ij}(t, x)$.

Cas général :
La classe la plus générale est celle des problèmes "complètement non linéaires", où la dépendance en les $\partial_{ij}u$ est non-linéaire, i.e de la forme $F(H(u), \nabla u, u, x) = 0$, où $H(u)$ désigne la matrice Hessienne de u. La condition d'ellipticité est alors que $F(., p, z, x)$ soit monotone par rapport à la matrice Hessienne, i.e que pour tout p, z, x et toute matrice N définie positive, on ait $F(M + N, p, z, x) \geq F(M, p, z, x)$.

Remarque : Cette définition coïncide avec la définition d'ellipticité dans les cas linéaires et semi-linéaires.

L'équation parabolique s'écrit alors : trouver u telle que

$$\frac{du}{dt} - F(H(u), \nabla u, u, x) = 0$$

Remarques :
- Le plus souvent, on s'intéresse au cas où la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))$ est symétrique, auquel cas la condition d'ellipticité équivaut à dire que la matrice $A(x)$ est définie positive et que sa plus petite valeur propre, dont nous expliciterons le sens plus tard, est minorée par α.
- On considérera généralement le cas particulier des opérateurs elliptiques écrits sous forme divergence :
$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) = \text{div}(A\nabla u)$$
.
- Le cas précédent, appliqué à la matrice $A = Id$ et au problème linéaire se réécrit : $\dfrac{du}{dt} - \Delta u = f$, et nous retrouvons l'équation de la chaleur.
- Si les coefficients a_{ij} de la matrice $A(x)$ sont constants (ne dépendent pas de x), alors on peut, en changeant de base, se ramener au Laplacien.
- l'étude du problème stationnaire elliptique correspondant $-\text{div}(A(x)\nabla u(x)) = f$, apporte de précieuses informations sur le problème parabolique initial.

Ainsi, l'étude de l'opérateur elliptique $\mathcal{L}$ et des problèmes elliptiques linéaires ou semi-linéaires associés s'avère un préalable indispensable.

Pour traiter le cas d'existence de solutions (et dans quel sens, autrement dit dans quels espaces fonctionnels) des **équations linéaires**, plusieurs stratégies sont possibles :

— En utilisant des formules de représentation,
— Par des méthodes de dualité, type Lax-Milgram,
— Par la théorie spectrale, Riesz-Fredholm.

Pour le cas des équations non linéaires, on peut utiliser des méthodes de points fixes ou des méthodes variationnelles (dérivant d'un principe de minimisation d'énergie).

L'unicité pour les équations linéaires est en général facile, difficile et même parfois en défaut pour les autres.

Enfin, les équations elliptiques, linéaires ou non linéaires ont des propriétés communes, notamment la régularité de leurs solutions et l'effet régularisant par rapport aux données initiales de $\mathcal{L}$. Nous étudierons en détail dans la section suivante de telles propriétés.

1.2.2 Problèmes de transport (hyperboliques)

Ce sont les problèmes où apparaît un terme de transport $-\nabla.(u\vec{v}) = -\mathrm{div}(u\vec{v})$.
Ainsi l'équation d'advection s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\mathrm{div}(u\vec{v})$$

L'équation d'advection-diffusion prend la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathrm{div}(D(t,x)\nabla u) - \mathrm{div}(u\vec{v}) \quad \text{(Fick)}$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta(D(t,x)u) - \mathrm{div}(u\vec{v}) \quad \text{(Fokker-Planck)}$$

To be continued...

2 Cas d'école : théorie variationnelle de l'équation de la chaleur

On traite ici le cas modèle de l'équation de la chaleur : trouver $u(t,x)$ telle que

$$\boxed{(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \quad \text{sur }]0;T] \times \Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{sur } \Omega \\ u(t,x) = 0 \text{ sur }]0;T] \times \partial\Omega \end{cases}}$$

Remarquons d'emblée que le terme source f n'est pas supposé dépendre de u (cas linéaire). Nous allons faire quelques hypothèses de régularité sur f et u_0 : $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Pour simplifier, sans pour autant perdre la généralité de la démarche, on a traité le cas d'une condition de Dirichlet homogène. En vue d'une implémentation future où il sera nécessaire de discrétiser en temps et travailler sur des espaces de dimension finie en espace (via la méthode des éléments finis), nous adopterons la démarche décrite dans le cours Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de Bonnet-Bendhia et Luneville.

2.1 Formulation variationnelle de l'équation de la chaleur

Une **solution forte** (ou classique) du problème de Cauchy (1) sur l'ouvert borné Ω est une solution telle que tous les termes de l'équation sont bien définis au sens classique (donc pas au sens des distributions)

sur $[0;T]\times\overline{\Omega}$. Choisissons f égale à la fonction nulle. On cherche donc des solutions appartenant à l'espace $\mathcal{C}_1^2([0;T]\times\overline{\Omega})$, espace des fonctions continues sur $[0;T]\times\overline{\Omega}$, et dont les dérivées en espace jusqu'à l'ordre 2 et la dérivée en temps sont continues sur $[0;T]\times\overline{\Omega}$.
Remarquons qu'avec la condition de Dirichlet homogène choisie, des conditions de compatibilité avec les conditions aux limites ou initiales s'imposent d'elles-mêmes :

— Si $x_0\in\partial\Omega$, on a pour tout $t\in]0;T]$, $u(t,x_0)=0$. Faisant tendre t vers 0, on obtient par continuité de u : $u_0(x_0)=0$. La donnée initiale doit donc vérifier la condition de Dirichlet homogène.

— De même, en évaluant l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)-\Delta u(t,x)=0$ en (t,x_0), on obtient que $\Delta u(t,x_0)=0$. Passant encore à la limite en faisant tendre t vers 0, et toujours grâce à la continuité de Δu, on obtient $\Delta u_0(x_0)=0$.

De même, si l'on part d'une condition de Neumann homogène sur le bord, la condition de compatibilité s'écrit $\frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x_0)=0\ \forall x_0\in\partial\Omega$.

Sous ces conditions nécessaires, ainsi qu'en imposant à u_0 une régularité supplémentaire (théorie Höldérienne), on peut s'assurer de l'existence et l'unicité d'une solution forte au problème (1), même avec $T=+\infty$. Moyennant certaines hypothèses (caractère lipschitzien en x), on peut remplacer le terme source $f(x)$ par un terme **non linéaire** de la forme $f(x,u)$ et garder le caractère bien posé du problème.
Si l'on souhaite affaiblir les hypothèses de régularité sur u_0, il existe aussi une théorie $W^{m,p}$, se basant sur les espaces de Sobolev.
Nous détaillerons ultérieurement les deux aspects cités précédemment. On peut consulter Roques[1] ou Vitali-Volpert[1] pour plus de détails.

Abandonnons pour le moment la notion de solution forte au profit de celle de solution faible, i.e de solution d'un problème dit variationnel équivalent (il faudra le vérifier) au problème (1). Supposons que $u(t,x)$ soit solution de (1). Dans un premier temps, on suppose u suffisamment régulière afin de pouvoir utiliser les formules de Green : $u\in\mathcal{C}^1(0,T,L^2(\Omega))\cap L^2(0,T,H^2(\Omega))$.

On multiplie la première ligne de (1) par une fonction test $v\in H_0^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω. On a alors :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(x)dx-\int_\Omega \Delta u(t,x)v(x)dx=\int_\Omega f(t,x)v(x)dx$$

En utilisant une formule de Green, et prenant en compte le fait qu'on ait une condition de Dirichlet homogène au bord, on a : $\int_\Omega \Delta u(t,x)v(x)dx=-\int_\Omega \nabla u(t,x).\nabla v(t,x)dx$, d'où :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(x)dx+\int_\Omega \nabla u(t,x).\nabla v(t,x)dx=\int_\Omega f(t,x)v(x)dx$$

Mais l'hypothèse de régularité sur u : $u\in\mathcal{C}^1(0,T;L^2(\Omega))$ nous permet d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme et donc $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(x)dx=\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)v(x)dx$. Ainsi :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)v(x)dx+\int_\Omega \nabla u(t,x).\nabla v(t,x)dx=\int_\Omega f(t,x)v(x)dx$$

Supposons maintenant moins de régularité sur u : $u\in\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$. La fonction F définie sur $[0;T]$ par $F(t)=\int_\Omega u(t,x)v(x)dx$ est seulement continue, mais $\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)v(x)dx$ a un sens en tant que distribution.
On sait en effet que $\mathcal{C}^0([0;T])$ s'injecte continûment dans $\mathcal{D}'(]0;T[)$ via l'application $\psi: f\mapsto\psi_f$, où

tout $\phi \in \mathcal{D}(]0;T[)$, $\psi_f(\phi) = \displaystyle\int_0^T f\phi$. En utilisant plusieurs fois le théorème de Fubini et une intégration par parties, on prouve alors que

$$\forall \Psi \in \mathcal{D}(]0;T[) \quad \left\langle \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)v(x)dx, \Psi \right\rangle = \left\langle \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t)v(x)dx, \Psi \right\rangle$$

Autrement dit, au sens des distributions on a toujours : $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(x)dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)v(x)dx$.
On peut alors énoncer la formulation variationnelle faible du problème (1) :

$$(2)\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^0(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\Omega) : \\ \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(t,x).\nabla v(t,x)dx = \int_\Omega f(t,x)v(x)dx \quad \forall t \in]0;T] \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

La formulation forte (1) et la formulation faible (2) sont équivalentes dans le sens : Toute fonction $u \in \mathcal{C}^1(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H^2(\Omega))$ est solution du problème (1) au sens des fonctions de $L^2(\Omega)$ si et seulement si elle vérifie la formulation faible (2).

Remarque : Plus généralement, si $u \in \mathcal{C}^0(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H^2(\Omega))$ est solution de (2), alors u vérifie (1) au sens des distributions sur $]0;T[\times\Omega$.

2.2 Existence d'une solution

Nous allons nous baser sur le résultat de décomposition spectrale de l'opérateur Δ énoncé dans l'annexe A : Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite croissante $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \cdots \to +\infty$ tels que $\forall n \geq 1$ $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et vérifiant :

$$(I_n)\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n \quad \text{sur } \Omega \\ e_n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

.

De ce résultat, on peut expliciter précisément (si elle existe) la forme de la solution u du problème variationnel (2).

Proposition : Si u est solution du problème (2), alors on a :

$$(3) \quad \forall t \in [0;T] \quad u(t) = \sum_{n\geq 1}\left((u_0,e_n)e^{-\lambda_n t} + \int_0^t (f(s),e_n)e^{-\lambda_n(t-s)}ds\right)e_n$$

la série étant convergente dans $L^2(\Omega)$ pour presque tout t.

Théorème (existence) : Si $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors le problème variationnel (2) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^0(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$.

Démonstration : La proposition précédente nous permet d'affirmer qu'il suffit de prouver la convergence de la série (3) pour tout $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Elle se fait en trois étapes :

Étape 1 : On commence par se ramener à la résolution d'un problème en dimension finie.
Posons $E_m = \text{Vect}(e_1,\ldots,e_m)$ l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les m fonctions propres

e_m. On remplace alors le problème continu (2) par le problème approché :
Trouver $u_m : t \in [0;T] \mapsto u_m(t) \in E_m$ solution du problème :

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} \int_\Omega u_m(t) v dx + \int_\Omega \nabla u_m(t). \nabla v dx = \int_\Omega f(t) v dx \quad \forall v \in V_m \\ u_m(0) = u_{0,m} = \sum_{i=1}^m (u_0, e_i) e_i \end{cases}$$

En particularisant les v sous la forme e_i on obtient en posant $\alpha_i(t) = (u_m(t), e_i)_{L^2(\Omega)}$ que

$$(3) \iff \forall 1 \leq i \leq m \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} \alpha_i(t) + \lambda_i(t) = (f(t), e_i) \\ \alpha_i(0) = (u_m(0), e_i) = (u_0, e_i) \end{cases}$$

La formule de Duhamel nous assure alors l'existence et l'unicité d'une solution à chacune de ces équations donnée par $\alpha_i(t) = \alpha_i(0) e^{-\lambda_i t} + \displaystyle\int_0^t (f(s), e_i) e^{-\lambda_i (t-s)} ds$.

Mais comme $u_m(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^m (u_m(t), e_i) e_i$, on obtient que :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m \left((u_0, e_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), e_i) e^{-\lambda_i (t-s)} ds \right) e_i$$

On retrouve la somme partielle d'ordre m de la série solution attendue.

Étape 2 : On va prouver que la suite (u_m) est une suite de Cauchy dans les espaces de Banach $\mathcal{C}^0(0, T, L^2(\Omega))$ et $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, et que les limites coïncident. C'est la partie la plus technique de la démonstration.

♦ (u_n) est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(0, T, L^2(\Omega))$ muni de la norme $\|u\| = \sup\limits_{t \in [0;T]} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$:
Soient $p > m \geq 1$ des entiers. Comme $(e_i)_{i \geq 1}$ est une base orthonormale de $L^2(\Omega)$, on a en utilisant l'égalité de Parseval que :

$$\|u_p(t) - u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} = \left[\sum_{i=m+1}^p \left((u_0, e_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), e_i) e^{-\lambda_i (t-s)} ds \right)^2 \right]^{1/2}$$

En vertu de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^{p-m}$ (muni de la norme euclidienne), le terme de droite est inférieur ou égal à :

$$\left[\sum_{i=m+1}^p (u_0, e_i)^2 e^{-2\lambda_i t} \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=m+1}^p \left(\int_0^t (f(s), e_i) e^{-\lambda_i (t-s)} ds \right)^2 \right]^{1/2}$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$ nous assure que :

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t (f(s), e_i) e^{-\lambda_i (t-s)} ds \right)^2 &\leq \left(\int_0^t (f(s), e_i)^2 \right) \left(\int_0^t e^{-2\lambda_i (t-s)} ds \right) \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_i} \left(\int_0^t (f(s), e_i)^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_1} \left(\int_0^t (f(s), e_i)^2 \right) \end{aligned}$$

Utilisant le fait que $\forall t \in [0;T]$ $e^{-2\lambda_i t} \leq 1$, on obtient :

$$(5) \quad \sup_{t\in[0;T]} \|u_p(t) - u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \left[\sum_{i=m+1}^{p} (u_0, e_i)^2\right]^{1/2} + \left[\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=m+1}^{p} \int_0^T (f(s), e_i)^2 ds\right]^{1/2}$$

En vertu de l'égalité de Parseval, et du fait que $u_0 \in L^2(\Omega)$, on a

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i\geq 1} (u_0, e_i)^2 < +\infty$$

De même, $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, d'où

$$\sum_{i\geq 1} \int_0^T (f(t), e_i)^2 dt < +\infty$$

Ainsi, chacun des termes de droite de (5) tend vers 0 quand m et p tendent vers $+\infty$. D'où le résultat annoncé.

♦ (u_n) est de Cauchy dans $L^2(0, T, H^0_1(\Omega))$ muni de la norme $\|u\| = \left(\int_0^T \|u(t)\|^2_{H^0_1(\Omega)}\right)^{1/2}$:

Rappelons que puisque Ω est borné, l'inégalité de Poincaré nous permet d'affirmer que la semi-norme $|u| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$ est en fait une norme sur $H^1_0(\Omega)$.

On a pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$ $\int_\Omega \nabla e_i . \nabla v dx = \lambda_i \int_\Omega e_i v dx$. On en déduit que pour presque tout $t \in [0;T]$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_p(t) - \nabla u_m(t)|^2 dx &= \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left(\int_\Omega (u_p(t) - u_m(t)) e_i dx\right)^2 \\
&= \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left((u_0, e_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), e_i) e^{-\lambda_i (t-s)} ds\right)^2
\end{aligned}$$

To be continued...

2.3 Propriétés de l'équation de la chaleur

2.4 Principe du maximum

2.5 Estimation d'énergie

3 Comportement asymptotique de solutions : problèmes elliptiques

Lorsque le temps d'observation T tend vers $+\infty$, il est fréquent de voir s'installer un régime stationnaire. Le terme $\frac{\partial}{\partial t}$ d'un problème parabolique disparait alors de l'équation et nous obtenons un problème elliptique (linéaire ou pas) où la variable temps t n'intervient plus. Nous rappelons dans cette section des résultats et méthodes usuels sur les équations elliptiques, que nous retrouverons plus tard dans le cas parabolique (par exemple la méthode d'itération monotone, l'utilisation des valeurs propres du Laplacien et notamment de sa valeur propre principale). Dans la section sur les Travelling Waves (ondes progressives), nous justifierons plus en détail cette idée de comportement en temps grand, et de l'utilité d'avoir des résultats sur les problèmes elliptiques pour en gagner sur les problèmes paraboliques.

3.1 Problème linéaire

Dans la suite, Ω désigne un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N \quad (N > 1)$; L est un opérateur elliptique du second ordre , sans terme d'ordre 0, i.e de la forme

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\partial_i u$$

On suppose que $a_{ij}, b_i \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$. On suppose de plus que les fonctions a_{ij} sont symétriques et vérifient la condition d'uniforme ellipticité usuelle : $(\exists \mu > 0)(\forall x \in \overline{\Omega})(\forall \xi \in \mathbb{R}^N) \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2$.

On posera enfin $\mathcal{L} = L + c$ l'opérateur elliptique du second ordre avec terme d'ordre 0 :

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\partial_i u + c(x)u$$

Cette distinction entre L et $\mathcal{L}$ est capitale comme nous le verrons par la suite car le signe du terme de réaction c a un rôle essentiel.

Principes du min/max (faible et fort) et principes de comparaison

Observation initiale importante :
- Si $Lu > 0$ dans Ω, alors on n'a pas de maximum local dans Ω
- Si $Lu < 0$ dans Ω, alors on n'a pas de minimum local dans Ω

Théorème : on suppose Ω borné et $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$.

1. Si $Lu \geq 0$ dans Ω, alors $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$ (principe du maximum faible)
2. Si $Lu \leq 0$ dans Ω, alors $\min\limits_{\overline{\Omega}} u = \min\limits_{\partial\Omega} u$ (principe du minimum faible)

Le but est maintenant de préciser sous quelle(s) condition(s) on peut remplacer L par $\mathcal{L} := L + c$. Posons $M := \max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$ et $m := \min\limits_{\overline{\Omega}} u = \min\limits_{\partial\Omega} u$.

Proposition :
- Si $c \leq 0$ et $M > 0$, alors le principe du maximum faible reste vrai pour $\mathcal{L}$
- Si $M = 0$, alors le principe du maximum faible reste vrai pour $\mathcal{L}$, quelque soit le signe de c.

Ce dernier résultat nous permet en particulier d'obtenir un principe de comparaison elliptique pour une condition de Dirichlet, qui entraîne lui-même l'unicité au problème de Dirichlet.

Théorème (comparaison pour le problème linéaire avec condition de Dirichlet) : On suppose que Ω est borné et que $c \leq 0$.
Si :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u \geq -\mathcal{L}v & \text{sur } \Omega \\ u \geq v & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors $u \geq v$ partout dans Ω.

Le cas de la condition de Neumann demande un peu de théorie supplémentaire. Énonçons pour cela le :

Lemme de Hopf :
Si

$$\begin{cases} Lu \geq 0 \ \text{ dans } \Omega \text{ borné} \\ (\exists x_0 \in \partial\Omega)(\forall x \in \Omega)\ u(x) < u(x_0) \\ \Omega \text{ vérifie la CSI : il existe une boule ouverte B telle que } B \subset \Omega \text{ et } x_0 \in \partial\Omega \end{cases}$$

alors $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$.

Remarque : Ce résultat reste vrai pour $\mathcal{L}$ si $c \leq 0$ et si $u(x_0) \geq 0$.

Théorème : Ω est borné ou $\Omega = \mathbb{R}^N$.

1. Si $Lu \geq 0$ sur Ω et si u atteint son maximum M en $x_0 \in \Omega$, alors $u \equiv M$ (principe du maximum fort à l'intérieur)
2. Si $Lu \leq 0$ sur Ω et si u atteint son minimum m en $x_0 \in \Omega$, alors $u \equiv m$ (principe du minimum fort à l'intérieur)

Remarque : Le principe du maximum fort reste vrai pour $\mathcal{L}$ si $c \leq 0$ et si $M \geq 0$.

Théorème (comparaison pour le problème linéaire avec condition de Neumann) : on suppose Ω borné, $c \leq 0$ et $c \neq 0$.
Si :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u \geq -\mathcal{L}v \ \text{ sur } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \geq \dfrac{\partial v}{\partial \nu} \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors $u \geq v$ partout dans Ω.

Théorème (principe du maximum fort sans hypothèse de signe sur c) :
Si :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u \geq 0 \ \text{ sur } \Omega \\ u \geq 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors :

1. Si $u(x_0) = 0$ pour un $x_0 \in \Omega$, alors $u \equiv 0$
2. Si $u \neq 0$, alors $(\forall x_0 \in \partial\Omega)\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$

Remarque : Ici, nous n'avons pas d'hypothèse sur le signe de c, mais en revanche nous disposons d'une information sur u : $u \geq 0$ sur Ω.

Résolution du problème linéaire

Estimations elliptiques a priori

Ces outils sont fondamentaux pour prouver l'existence de solutions pour des problèmes elliptiques. La démonstration des résultats mentionnés ci-après est néanmoins délicate. On pourra consulter Vitali-Volpert[1] pour plus de détails. Deux cadres se dégagent :

— le cadre Höldérien, où nous disposons des estimations a priori de Schauder
— le cadre Sobolev, où nous disposons des estimations a priori de Agman-Douglas-Niremberg

On s'intéresse au problème :

$$(P) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec l'hypothèse que tous les coefficients de $\mathcal{L}$ sont dans $\mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$ pour un $\alpha \in]0;1]$ et que $c \leq 0$.
Les résultats fondamentaux sur les espaces de Hölder et de Sobolev dont nous aurons besoin sont rappelés en annexe. Remarquons cependant que nous possédons un lien entre ces deux catégories d'espaces grâce au théorème suivant.

Théorème (de Sobolev-Morrey) : Ω est un ouvert borné régulier ou $\Omega = \mathbb{R}^N$.
Si $p > N$ (inégalité stricte), alors $W^{k,p} \hookrightarrow \mathcal{C}^{k-1,\alpha}$ (injection continue), où $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$.

Énonçons-les estimations en question :

1. Il existe une constante C indépendante de f telle que pour toute solution u du problème de Dirichlet (P), $\|u\|_{2+\alpha} \leq C\|f\|_\alpha$ (estimation de Schauder).
2. Il existe une constante C indépendante de f telle que pour toute solution u du problème de Dirichlet (P), $\|u\|_{W^{2,p}} \leq C\|f\|_{L^p}$ (estimation de Agman-Douglas-Niremberg).

Solvabilité du problème linéaire

Théorème : $(\forall f \in \mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega}))(\exists! u \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}))$ tel que $\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

Le but est maintenant de relier L (connu) à $\mathcal{L} := L + c$ (inconnu).
L'idée est de partir de la solution obtenue grâce au théorème précédent et, par homotopie, d'aller vers $\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$.

Méthode : On construit une famille de problèmes

$$(P_\tau) \quad \begin{cases} (1-\tau)\Delta u + \tau\mathcal{L}u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $0 \leq \tau \leq 1$.
On prouve ensuite que : $(\exists \epsilon > 0)(\forall \tau_0 \in T)$, $[\tau_0, \tau_0 + \epsilon] \subset T$, où $T := \{\tau \in [0;1[; (\forall f \in \mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega}))(\exists! u \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}))$ solution de $(P_\tau)\}$.
Remarquons que puisque ϵ est indépendant de τ_0, on obtient $T = [0;1]$.
L'outil majeur est le théorème du point fixe de Picard.

Théorème : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. Supposons que

— L a ses coefficients dans $\mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$ et vérifie la condition d'uniforme ellipticité
— $c \leq 0$

Alors

$$(\forall f \in \mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega}))(\exists! u \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})) \text{ tel que } \begin{cases} (L+c)u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Donnons l'idée de la démonstration :

— on définit la famille de problèmes linéaires (P_τ)
— On reformule le problème $\mathcal{L}_\tau u = f$: Pour $\tau_0 \in T$ fixé, on remarque que $\mathcal{L}_\tau u = f \Longleftrightarrow \mathcal{L}_{\tau_0} u = f + (\tau - \tau_0)(\Delta u - \mathcal{L}u)$. On pose alors $\tilde{f} := f + (\tau - \tau_0)(\Delta u - \mathcal{L}u)$.

— On définit l'opérateur

$$\Phi_{\tau_0} : \begin{cases} \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\ u \mapsto \Phi(u) = v \ \text{ solution de } \begin{cases} \mathcal{L}_{\tau_0} = \tilde{f} \ \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \end{cases}$$

et on prouve à l'aide des estimations de Schauder et du fait que $\|\Delta u\|_\alpha \leq C\|u\|_{2+\alpha}$ que cet opérateur est contractant.

— On conclut à l'aide du théorème du point fixe de Picard.

Remarques :

— On a un théorème analogue avec une condition de Neumann, sous réserve que $c \neq 0$ et $c \leq 0$.

— On a aussi un théorème analogue dans le cadre de la théorie de Sobolev. **Le citer ? Parler aussi d'estimations intérieures a priori ?**

3.2 Problème non linéaire

La méthode d'itération monotone, qui sera détaillée dans le résultat suivant nous permet de traiter le cas de problèmes semi-linéaires. Présentons le problème étudié :

Ω est un ouvert régulier borné, l'opérateur L est supposé uniformément elliptique et à coefficients dans $\mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$. On définit :

$$(P) \quad \begin{cases} Lu + f(x,u) = 0 \ \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \ \text{ dans } \partial\Omega \end{cases}$$

On fait l'hypothèse que $f \in \mathcal{C}_x^{0+\alpha}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}_1^u$ (en fait f lipschitzienne par rapport à u suffirait).

Théorème : Si on a une sur-solution qui majore une sous-solution, alors il existe une solution du problème (P) coincée entre les deux. Plus précisément :

Supposons que $v_0 \leq u_0$ dans $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tels que :

si $\begin{cases} -Lv_0 - f(x,v_0) \leq 0 \ \text{ dans } \Omega \\ v_0 \leq 0 \ \text{ dans } \partial\Omega \end{cases}$

et $\begin{cases} -Lu_0 - f(x,u_0) \geq 0 \ \text{ dans } \Omega \\ u_0 \geq 0 \ \text{ dans } \partial\Omega \end{cases}$

Alors $\exists v_0 \leq u \leq u_0$ dans $\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ solution de (P).

Démonstration : Nous allons détailler ici la méthode d'**itération monotone**, très semblable à la notion de suites adjacentes, mais nécessitant un arsenal technique plus important. Elle se généralise aisément au cas des problèmes paraboliques.

Remarquons qu'aucune hypothèse n'est faite sur $\partial_u f$ qui joue le rôle de c.
Une solution est un point fixe de l'opérateur :

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\ u \mapsto \phi(u) := v \text{ l'unique solution de } \begin{cases} Lv - Kv = -f(x,u) - Ku \text{ sur } \Omega \\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \end{cases}$$

où K est choisi assez grand pour que $K + \partial_u f(x,u) > 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}, \ \forall u \in [m = \min v_0, M = \max u_0]$
Remarque : $(L-K)v = -f(x,u) - Ku \in \mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$. Comme $c \equiv -K < 0$, on sait qu'il existe une

unique solution $v \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.
Notre but est donc de construire un point fixe de l'opérateur ϕ.

Étape 1 : $\boxed{\text{Si } m \leq u_1 \leq u_2 \leq M, \text{ alors } v_1 < v_2 \text{ dans } \Omega \text{ et } u_1 \neq u_2}$.

On a par hypothèse :
$\begin{cases} (L-K)v_1 = -f(x,u_1) - Ku_1 \text{ dans } \Omega \\ v_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$
$\begin{cases} (L-K)v_2 = -f(x,u_2) - Ku_2 \text{ dans } \Omega \\ v_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$
Posons $w = v_1 - v_2$.

$$\begin{aligned}(L-K)w &= -(f(x,u_1) - f(x,u_2)) - K(u_1 - u_2) \\ &= -(u_1 - u_2)\partial_u f(x,\theta) - K(u_1 - u_2), \; u_1 < \theta < u_2 \\ &= -(u_1 - u_2)[\partial_u f(x,\theta) + K] \\ &\geq 0 \text{ dans } \Omega \; (\triangle) \\ \\ w &= 0 \text{ sur } \partial\Omega.\end{aligned}$$

D'après le principe du maximum fort, si w touche son max $M \geq 0$ à l'intérieur, alors $w \equiv M$ et $M \equiv 0$ grâce à la condition de bord. Ainsi, $w \equiv 0$. Par $(\triangle)$, $u_1 \equiv u_2$, ce qui n'est pas. Donc $v_1 < v_2$ dans Ω.

Étape 2 : $\boxed{\text{Si } u \text{ est une sur-solution qui n'est pas une solution, alors } \phi u = v < u \text{ dans } \Omega}$.

On a par hypothèse : $\begin{cases} -Lu - f(x,u) \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ u \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$
$\begin{cases} (L-K)v = -f(x,u) - Ku \text{ dans } \Omega \\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$
Posons $w := v - u$.
$(L-K)v \geq (L-K)u$, d'où $\begin{cases} (L-K)w \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ w \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$
Comme précédemment, en utilisant le principe du maximum fort (sans hypothèse de signe sur c) :

1. Soit $w \neq 0$. Mais alors $u \equiv v$. Donc u solution. Absurde.
2. Soit $w < 0$ dans Ω. Ainsi $v < u$ dans Ω.

Étape 3 : $\boxed{\text{On utilise une récurrence}}$.

$$\begin{array}{llll} u_0 \text{ sursolution (non solution)} & \longrightarrow u_1 < u_0 \text{ dans } \Omega & \longrightarrow u_2 < u_1 < u_0 \; \ldots & u_{n+1} = \phi(u_n) \\ \neq \text{ (sinon } u_0 = v_0 \text{ solution)} & \quad\vee \text{ (par l'étape 1)} & \quad\vee & \quad\vee \\ v_0 \text{ sous-solution (non solution)} & \longrightarrow v_1 > v_0 \text{ dans } \Omega & \longrightarrow v_2 > v_1 > v_0 \; \ldots & v_{n+1} = \phi(v_n) \end{array}$$

On dispose ainsi de deux suites (u_n) (sur-solution) et (v_n) (sous-solution) telles que :
$v_0(x) < v_1(x) < \cdots < v_n(x) < u_n(x) < \cdots < u_1(x) < u_0(x)$ dans Ω.
Ainsi, pour tout $x \in \Omega$, $(u_n(x))$ est décroissante et minorée par $v_0(x)$.
Donc $u(x) := \lim_{n \to +\infty} u_n(x)$ existe.

Malheureusement, cette convergence simple est insuffisante pour passer à la limite dans :
$u_{n+1} = \phi(u_n)$ i.e $\begin{cases} (L-K)u_{n+1} = -f(x,u_n) - Ku_n \text{ dans } \Omega \\ u_{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$ qui deviendrait :

$$\begin{cases}(L-K)u=-f(x,u)-Ku \text{ dans } \Omega \\ u=0 \text{ sur } \partial\Omega\end{cases}$$

Étape 4 :

On va améliorer la convergence pour passer à la limite dans : $\begin{cases}(L-K)u_{n+1}(x):=-f(x,u_n(x))-Ku_n(x) \text{ dans } \Omega \\ u_{n+1}(x)=0 \text{ sur } \partial\Omega\end{cases}$

D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=-f(x,u(x))-Ku(x) \quad \forall f\in\mathcal{C}_u^1(\Omega)\subset\mathcal{C}_u^0(\Omega)$.

D'autre part, $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in\Omega\ |f_n(x)|\leq|f(x,u_n(x))|+K|u_n(x)|$.
Or $m\leq u_n(x)\leq M$, donc :
$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in\Omega\ |f_n(x)|\leq \sup\limits_{x\in\overline{\Omega},m\leq u\leq M}|f(x,u)|+K\max(|m|,|M|)=$ constante $\in L^p(\Omega)$ (car Ω borné).
Donc par convergence dominée, on a $f_n\to-f(x,u(x))-Ku(x)$ dans $L^p(\Omega)$.
En particulier, (f_n) est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$.

Les estimations elliptiques $W^{2,p}(\Omega)$ de Agmon-Douglas-Niremberg assurent alors que : $\|u_{n+1}-u_{p+1}\|_{W^{2,p}}\leq\|f_n-f_p\|_{L^p(\Omega)}$.
Mais alors, (u_n) est de Cauchy dans l'espace de Banach $W^{2,p}(\Omega)$. Donc il existe w telle que $u_n\to w$ dans $W^{2,p}(\Omega)$.
D'après le théorème de Sobolev-Morrey, $W^{2,p}(\Omega)\hookrightarrow\mathcal{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ en prenant $p>N$.
Donc $u_n\to w$ dans $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. En particulier (u_n) converge simplement vers w. D'où $w\equiv u$.
Bilan partiel : $u_n\to u$ dans $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ $(\blacksquare)$.

Effectuons une dernière amélioration :
$$\begin{cases}(L-K)(u_{n+1}-u_{p+1})=f_n-f_p \text{ dans } \Omega \\ u_{n+1}-u_{p+1}=0 \text{ sur } \partial\Omega\end{cases}$$
$(\blacksquare)$ implique que $f_n\to-f(x,u(x))-Ku(x)$ dans $\mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$ grâce aux hypothèses sur f.
En utilisant les estimations de Schauder, on a $\|u_{n+1}-u_{p+1}\|_{2+\alpha}\leq\|f_n-f_p\|_\alpha$.
On prouve aisément que (f_n) est de Cauchy dans $\mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$, donc (u_n) est de Cauchy dans $\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, qui est un espace de Banach. Donc (u_n) converge vers une limite qui ne peut être que u.

Bilan final : $u_n\to u$ dans $\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ et le passage à la limite devient possible. CQFD.

4 Équations de diffusion-réaction

4.1 Problèmes paraboliques généraux

4.1.1 Principes de comparaison parabolique

Notations : Définissons $P=L-\dfrac{\partial}{\partial t}$, où L est un opérateur elliptique du second ordre , sans terme d'ordre 0, i.e de la forme $Lu=\sum\limits_{i,j=1}^N a_{ij}(t,x)\partial_{ij}u+\sum\limits_{i=1}^N b_i(t,x)\partial_i u$.
On posera $\mathcal{P}=P+c$, soit $\mathcal{P}u=\sum\limits_{i,j=1}^N a_{ij}(t,x)\partial_{ij}u+\sum\limits_{i=1}^N b_i(t,x)\partial_i u+c(t,x)u-\dfrac{\partial u}{\partial t}$.
On suppose les fonctions a_{ij} symétriques, vérifiant la condition d'ellipticité usuelle. On pose $Q_T:=]0;T]\times\Omega$ et on suppose les $b_i\in\mathcal{C}(\overline{Q_T})$.
On pose enfin $FL:=]0;T]\times\partial\Omega$ (frontière latérale) et socle $=\{0\}\times\overline{\Omega}$.

La **frontière parabolique** est définie par $FP = \text{socle} \cup FL$.
$\mathcal{C}^2_1(]0;T] \times \Omega)$, noté aussi $\mathcal{C}^{1,2}(]0;T] \times \Omega)$ désigne les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ en temps sur Q_T et de classe $\mathcal{C}^2$ en espace sur Q_T.

Observation initiale importante : Soit $u \in \mathcal{C}(\overline{Q_T}) \cap \mathcal{C}^2_1(Q_T)$ vérifiant $Pu > 0$ sur Q_T. Alors u n'a pas de maximum sur Q_T.

Théorème (Principes du maximum parabolique faible) : Ω est supposé borné.

1. Si $Pu \geq 0$ dans Q_T et $u \in \mathcal{C}(\overline{Q_T}) \cap \mathcal{C}^2_1(Q_T)$. Alors $\max\limits_{\overline{Q_T}} u = \max\limits_{FP} u$. On notera M ce maximum.
2. Sous l'hypothèse $c(t,x) \leq 0$ et $M \geq 0$, le résultat précédent reste vrai pour l'opérateur (avec terme d'ordre 0) $\mathcal{P} := P + c$.

Nous allons maintenant énoncer deux théorèmes de comparaison parabolique : le premier traite du cas linéaire et le second s'applique au cas non linéaire (version semi-linéaire). Leur point commun est qu'aucune hypothèse de signe n'est exigée sur c. Un des grands avantages des problèmes paraboliques et que nous avons toujours comparaison !

Commençons par définir le problème parabolique linéaire :

$$(1) \quad \begin{cases} -\mathcal{P}u = f(t,x) \ \text{ sur } Q_T \\ u(t,x) = g(x) \ \text{ ou } \ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) = g(x) \ \text{ sur } FL \\ u(0,x) = u_0(x) \ \text{ sur } \{0\} \times \overline{\Omega} \ \text{ (socle)} \end{cases}$$

Définition :

1. Une fonction régulière $\overline{u} \in \mathcal{C}^2_1(Q_T)$ vérifiant
$$\begin{cases} -\mathcal{P}\overline{u} \geq f(t,x) \ \text{ sur } Q_T \\ \overline{u}(t,x) \geq g(x) \ \text{ ou } \ \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \nu}(t,x) \geq g(x) \ \text{ sur } FL \\ \overline{u}(0,x) \geq u_0(x) \ \text{ sur } \{0\} \times \overline{\Omega} \ \text{ (socle)} \end{cases}$$
est appelée sur-solution du problème linéaire (1).
2. Une fonction régulière $\underline{u} \in \mathcal{C}^2_1(Q_T)$ vérifiant
$$\begin{cases} -\mathcal{P}\underline{u} \leq f(t,x) \ \text{ sur } Q_T \\ \underline{u}(t,x) \leq g(x) \ \text{ ou } \ \dfrac{\partial \underline{u}}{\partial \nu}(t,x) \leq g(x) \ \text{ sur } FL \\ \underline{u}(0,x) \leq u_0(x) \ \text{ sur } \{0\} \times \overline{\Omega} \ \text{ (socle)} \end{cases}$$
est appelée sous-solution du problème linéaire (1).

Remarque : Pour trouver des sur et sous-solutions du problème parabolique, on peut tester
- 0
- Les "grandes" constantes
- ϕ fonction propre principale (cf rappels sur la théorie spectrale en annexe)
- La solution de l'EDO associée (sans $\mathcal{L}$)

Théorème (Principe de comparaison parabolique linéaire) :

Soient u et v deux fonctions dans $\mathcal{C}^2_1(]0;T] \times \overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}([0;T] \times \overline{\Omega})$ vérifiant

$$(i) \quad -\mathcal{P}u \leq -\mathcal{P}v \ \text{ sur } Q_T$$

et

$$(ii) \quad u(0,x) \leq v(0,x) \text{ sur } \Omega$$

On suppose également que

$$(iii) \quad u(t,x) \leq v(t,x) \text{ sur } FL$$

ou que

$$(iv) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) \leq \frac{\partial v}{\partial \nu}(t,x) \text{ sur } FL$$

Alors : $u \leq v$ dans $\overline{Q_T}$ et :
- soit $u \equiv v$ dansQ_T,
- soit $u < v$ dans Q_T (séparation stricte).

Application : Si $f \geq 0$, $g \geq 0$, $u_0 \geq 0$, alors pour toute solution classique u du problème (1), on a $u(t,x) \geq 0 \ \forall (t,x) \in \overline{Q_T}$.

Définissons maintenant le problème parabolique semi-linéaire :

$$(2) \quad \begin{cases} -\mathcal{P}u = f(t,x,u) \text{ sur } Q_T \\ u(t,x) = g(x) \text{ ou } \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) = g(x) \text{ sur } FL \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ sur } \{0\} \times \overline{\Omega} \text{ (socle)} \end{cases}$$

On suppose que $T > 0$ (T peut éventuellement être infini), que f et $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ appartiennent à $\mathcal{C}([0;T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Théorème (Principe de comparaison parabolique non linéaire) :

Soient u et v deux fonctions dans $\mathcal{C}^2_1(]0;T] \times \overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}([0;T] \times \overline{\Omega})$ vérifiant

$$(i) \quad -\mathcal{P}u - f(t,x,u) \leq -\mathcal{P}v - f(t,x,v) \text{ sur } Q_T$$

et

$$(ii) \quad u(0,x) \leq v(0,x) \text{ sur } \Omega$$

On suppose également que

$$(iii) \quad u(t,x) \leq v(t,x) \text{ sur } FL$$

ou que

$$(iv) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) \leq \frac{\partial v}{\partial \nu}(t,x) \text{ sur } FL$$

Alors : $u \leq v$ dans $\overline{Q_T}$ et :
- soit $u \equiv v$ dansQ_T,
- soit $u < v$ dans Q_T (séparation stricte).

Remarque : Comme pour le cas linéaire, nous disposons de la notion de sous-solution et de sur-solution du problème semi-linéaire (2).

Nous disposons également d'un lemme de Hopf parabolique. Citons-en un cas particulier mais courant :

Théorème (Lemme de Hopf parabolique) : Soit $T > 0$, $c(t,x) \in \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Omega})$ et $u(t,x) \in \mathcal{C}^2_1(]0,T] \times \Omega) \cap \mathcal{C}^1_0([0,T] \times \overline{\Omega})$ tels que :

$$\begin{cases} \partial_t u \geq D\Delta u + c(t,x)u, \ t \in]0,T], \ x \in \Omega \\ u(t,x) \geq 0, t \in [0,T], \ x \in \Omega \end{cases}$$

Supposons que $u(t_0,x_0) = 0$ pour un $(t_0,x_0) \in]0,T] \times \partial\Omega$. Alors :

- soit $u \equiv 0$ dansQ_T,
- soit $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(t_0,x_0) < 0$.

4.1.2 Existence de solutions aux problèmes paraboliques

Les principes de comparaison précédents sont de puissants outils pour prouver l'existence de solutions à des problèmes paraboliques linéaires ou non. La technique d'itération monotone qui sera explicitée plus tard est d'une grande efficacité pour les problèmes non-linéaires. Elle est identique à celle vue dans le cas elliptique.
Nous avons besoin de nous rappeler quelques faits sur la solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur, qui nous seront utiles dans la preuve du théorème d'existence de solution sur $\mathbb{R}^N$, ainsi que d'expliciter la notion de conditions de compatibilité.

Rappels sur le noyau de la chaleur : N désigne un entier supérieur ou égal à 1
On pose $G(t,x) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-|x|^2/4t}$ si $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$. Alors :

1. $G \in \mathcal{C}^\infty(]0;+\infty[\times\mathbb{R}^N)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t} = \Delta G$ (solution de l'équation de la chaleur)
2. G est une unité approchée quand $t \to 0$ i.e
   a) $G \geq 0$
   b) $\forall t \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G(t,x)dx = 1$
   c) $\forall \epsilon > 0 \quad \displaystyle\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N \smallsetminus B(0,\epsilon)} G(t,x)dx = 0$

Nous nous intéressons maintenant au problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{sur }]0;+\infty[\times\mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

On suppose $u_0 \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, l'espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^N$. Posons $u(t,x) := [G(t,.) * u_0](x)$ (convolution dans l'espace) i.e $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y)dy$.
Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(]0;+\infty[\times\mathbb{R}^N)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ sur $]0;+\infty[\times\mathbb{R}^N$.
De plus, si $u_0 \geq 0$ ($u_0 \neq 0$), alors $(\forall t > 0)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N)$ $u(t,x) > 0$. De plus, on obtient le principe de comparaison : si $u_0 \leq v_0$, alors à tout temps $u \leq v$.

Existence en domaine borné (cas linéaire)

Ω est un ouvert borné régulier.

Comme pour le cas elliptique, on dispose d'estimations paraboliques a priori, où les $W^{2,p}(\Omega)$ deviennent les $W^{1,2,p}((0,T)\times\Omega)$ et où les $\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ deviennent les $\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([0;T]\times\overline{\Omega})$.

On peut alors "par continuation" comme vu précédemment, relier l'équation de la chaleur à un problème parabolique linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u \quad \text{sur }]0;T[\times\Omega \\ u = 0 \text{ sur }]0;T[\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{sur } \{0\}\times\overline{\Omega} \end{cases}$$

En parabolique, on a toujours comparaison ! On a alors le caractère bien posé des problèmes paraboliques et des estimations paraboliques a priori.

Nous allons considérer deux cas modèles (Dirichlet et Neumann) :

$$(\mathcal{P}_D)\begin{cases}\mathcal{P}u = f(t,x) \text{ sur } Q_T :=]0;T] \times \Omega \quad (1)\\ u(t,x) = \phi(t,x) \text{ sur } FL :=]0;T] \times \partial\Omega \quad (2)\\ u(0,x) = u_0(x) \text{ sur } \{0\} \times \overline{\Omega} \quad (3)\end{cases}$$

Nous devrons alors vérifier les deux conditions de compatibilité (quand t tend vers 0 dans (2) et (3)) :

1. $u_0(x) = \phi(0,x)$ sur $\partial\Omega$
2. $\displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}(0,x)\partial^2_{ij}u_0 + \sum_i b_i(0,x)\partial_i u_0 + c(0,x)u_0 - f(0,x) = \partial_t\phi(0,x)$ sur $\partial\Omega$

Pour la suite, nous supposerons que la condition d'uniforme ellipticité est valide :

$$(\star)\ \exists\mu > 0\ \forall t \in [0;T]\ \forall x \in \overline{\Omega}\ \forall\xi \in \mathbb{R}^N\ \sum_{i,j} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème d'existence :

Théorème : Supposons la condition $(\star)$ vérifiée et que les coefficients a_{ij}, b_i, et c appartiennent à l'espace de Hölder $\mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q_T})$. La frontière du domaine $\partial\Omega$ est supposée de classe $\mathcal{C}^{2+\alpha}$. Si les conditions de compatibilité (1) et (2) sont satisfaites, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q_T})$, $u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ et $\phi \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{\partial\Omega})$, le problème $(\mathcal{P}_D)$ a une unique solution $u \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q_T})$ et on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q_T})} \leq C\left(\|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q_T})} + \|u_0\|_{\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\phi\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{\partial\Omega})}\right)$$

De même, nous pouvons traiter le cas d'un problème de Neumann :

$$(\mathcal{P}_N)\begin{cases}\mathcal{P}u = f(t,x) \text{ sur } Q_T :=]0;T] \times \Omega \quad (1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}(t,x) = \phi(t,x) \text{ sur } FL :=]0;T] \times \partial\Omega \quad (2)\\ u(0,x) = u_0(x) \text{ sur } \{0\} \times \overline{\Omega} \quad (3)\end{cases}$$

Théorème : Supposons la condition $(\star)$ vérifiée et que les coefficients a_{ij}, b_i, et c appartiennent à l'espace de Hölder $\mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q_T})$. La frontière du domaine $\partial\Omega$ est supposée de classe $\mathcal{C}^{2+\alpha}$. Si u_0 satisfait $\dfrac{\partial u_0}{\partial\nu} = \phi(0,x)$ sur FL (condition de compatibilité), alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q_T})$, $u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ et $\phi \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{\partial\Omega})$, le problème $(\mathcal{P}_N)$ a une unique solution $u \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q_T})$ et on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q_T})} \leq C\left(\|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q_T})} + \|u_0\|_{\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\phi\|_{\mathcal{C}^{(1+\alpha)/2,1+\alpha}(\overline{\partial\Omega})}\right)$$

Existence en domaine borné (cas non linéaire)

Considérons le problème parabolique semi-linéaire :

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\mathcal{P}u = 0 \text{ sur } Q_T :=]0;T] \times \Omega \quad (1)\\ u(t,x) = \phi(t,x) \text{ sur } FL :=]0;T] \times \partial\Omega \quad (2)\\ u(0,x) = u_0(x) \text{ sur } \{0\} \times \overline{\Omega} \quad (3)\end{cases}$$

avec $\displaystyle\mathcal{P}u := \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t,x,u)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^N b_i(t,x,u)\partial_i u + c(t,x,u) - \frac{\partial u}{\partial t}$.

Théorème : Supposons que les fonctions a_{ij}, b_i et c soient uniformément bornées et continues sur $\overline{Q_T}$, $u \in \mathbb{R}$, de même que leurs dérivées premières par rapport à n'importe quelle variable t, x, u et que :

$$\exists \nu, \mu > 0 \ \forall (t,x) \in \overline{Q_T} \ \forall u \in \mathbb{R} \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N \ \nu |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t,x,u)\xi_i \xi_j \leq \mu |\xi|^2$$

Si la frontière du domaine $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^{2+\alpha}$, $u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\phi \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\overline{Q_T})$ et que l'on a les conditions de compatibilité :

— $u_0(x) = \phi(0,x), \ x \in \partial\Omega$

— $\displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}(0,x,u_0)\partial^2_{ij} u_0 + \sum_i b_i(0,x,u_0)\partial_i u_0 + c(0,x,u_0) = \partial_t \phi(0,x)$ sur $\partial\Omega$

Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\overline{Q_T})$ du problème $\mathcal{P}$.

Considérons le problème non linéaire typique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x) + f(x,u) \ \text{ sur }]0;T[\times\Omega \\ u(t,x) = 0 \ \text{ sur }]0;T[\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \ \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

avec $f \in \mathcal{C}^\alpha_x \cap \mathcal{C}^1_u$ et $u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$

Théorème (de comparaison et d'existence) : Sous les hypothèses de régularité précédentes, et en supposant les conditions de compatibilité :

— $u_0(x) = 0$ pour $x \in \partial\Omega$

— $\Delta u_0(x) + f(x,0) = 0$ pour $x \in \partial\Omega$

vérifiées, si l'on dispose de $u^- \leq u^+$ telles que :

1. $\partial_t u^- - \Delta u^- - f(x,u^-) \leq 0 \leq \partial_t u^+ - \Delta u^+ - f(x,u^+)$ sur $(0,T) \times \Omega$
2. $u^- \leq 0 \leq u^+$ sur $(0,T) \times \partial\Omega$
3. $u^- \leq u_0 \leq u^+$ sur Ω

alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\overline{Q_T})$ du problème précédent, et de plus $u^- \leq u \leq u^+$.

Remarque : ce théorème précise le théorème de comparaison parabolique non linéaire vu avant. Pour une généralisation, on peut consulter Vitaly-Volpert [2, p128].

Existence en domaine non borné ($\Omega = \mathbb{R}^N$)

Théorème (cas linéaire) : Supposons que l'opérateur parabolique $\mathcal{P}$ vérifie la condition d'uniforme ellipticité usuelle et que ses coefficients appartiennent à $\mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^N)$. Alors :
$\forall f \in \mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ et $u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^N)$, le problème

$$\begin{cases} \mathcal{P}u = f(t,x) \text{ sur } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

a une unique solution $u \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ et on a :
$\|u\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^N)} \leq C \left(\|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{\mathcal{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^N)} \right)$.

To be continued...

5 Ondes progressives : Travelling waves

Nous prendrons comme cadre l'équation de réaction diffusion normalisée :

$$\partial_t u = \Delta u + f(u)$$

le premier terme Δu exprimant la diffusion et le second terme $f(u)$ la croissance.
La fonction f peut être de type :

1. Fischer-KPP (monostable) : $f(u) = Du\left(1 - \dfrac{u}{K}\right)$.
   La croissance est meilleure à faible densité (même avec effet Allee faible).
2. Bistable (Effet Allee fort)
3. Ignition : Bistable aussi. On a un seuil θ pour la réaction.

5.1 EDP du type Fisher-KPP

5.1.1 Dans $\mathbb{R}^N$, homogène

Le modèle type est le suivant :

$$(\star)\begin{cases}\partial_t u = \Delta u + f(u),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N\end{cases}$$

Pour simplifier, $f(u) = u(1-u)$.

On prend comme hypothèse que :
- $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$, l'espace vectoriel des fonctions bornées et uniformément continues sur $\mathbb{R}^N$, muni de la norme du sup.
- $0 \leq u_0 \leq 1$

Alors il existe une unique *solution globale* $u(t,x)$ au sens de Duhamel et $0 \leq u \leq 1$ (Théorème de solvabilité globale).

Question : Quid de $u(t,x)$ quand $t \to +\infty$? (Comportement en temps long du problème de Cauchy)

☐ *Un cas favorable* : $\exists \epsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^N\ u_0(x) \geq \epsilon$.
Alors la solution de l'EDO

$$\begin{cases}\theta'(t) = f(\theta(t)) \\ \theta(0) = \epsilon\end{cases}$$

est sous-solution de $(\star)$.
Par le théorème de solvabilité globale rappelé précédemment, $\theta(t) \leq u(t,x) \leq 1$.
La dynamique de l'EDO dit que $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = 1$ (car $\epsilon > 0$).
Ainsi, $u(t,x) \to 1$ quand $t \to +\infty$ uniformément en x. Il y a **propagation**.

☐ Supposons la donnée initiale u_0 *à support compact.*

Lemme : Soit le problème

$$\begin{cases}\partial_t u - \Delta u - f(u) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}^N\end{cases}$$

Si ψ vérifie $\mathcal{L}\psi \leq 0$, alors la solution $u(t,x)$ croît en temps.

Théorème : Il y a **propagation** : pour tout u_0 à support compact ($u_0 \neq 0$), $\forall x \in \mathbb{R}^N \lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x) = 1$

Démonstration : Elle se fait en trois étapes.

1. On prouve que $1 \geq u(1+t,x) \geq z(t,x) \uparrow p(x)$ quand $t \to +\infty$
2. p est solution du problème stationnaire sous-jacent : $-\Delta p = f(p)$ dans $\mathbb{R}$
3. $\begin{cases} -\Delta p = f(p) \text{ dans } \mathbb{R} \\ 0 \leq p \leq 1 \end{cases} \implies p \equiv 1$

Étape 1 : On cherche une solution de $\mathcal{L}u = 0$ à l'aide d'une fonction propre du Laplacien (*Technique à retenir*).

$$\begin{cases} -\Delta\phi_R = \lambda_R\phi_R \text{ dans } B_R := B(0,R) \\ \phi_R = 0 \text{ sur } \partial B_R \\ \phi_R > 0 \text{ et } \|\phi_R\|_{L^\infty} = 1 \text{ dans } B_R \end{cases}$$

Du fait de la non-linéarité de f, on calculera $\mathcal{L}(\epsilon\phi_R)$ et non $\mathcal{L}(\phi_R)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\epsilon\phi_R) &= \partial_t\phi_R - \Delta(\epsilon\phi_R) - \epsilon\phi_R(1-\phi_R) \\ &= \epsilon\lambda_R\phi_R - \epsilon\phi_R(1-\epsilon\phi_R) \\ &= \epsilon\phi_R(\lambda_R - 1 + \epsilon\phi_R) \\ &\leq \epsilon\phi_R(\lambda_R - 1/2) \text{ dès que } 0 < \epsilon \leq 1/2 \\ &\leq 0 \text{ si } R \text{ assez grand car } \lambda_R \downarrow 0 \text{ quand } R \to +\infty \end{aligned}$$

Or $\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0 \ (u_0 \neq 0) \end{cases}$, donc par comparaison $u \geq 0$,
puis par séparation stricte, $u(t,x) > 0$ si $t > 0$. En particulier, $u(1,x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N$.
On peut donc choisir $\epsilon > 0$ assez petit afin que $\forall x \in \mathbb{R}^N \ \epsilon\phi_R(x) \leq u(1,x)$.
On définit donc $z(t,x)$ comme la solution de :

$$\begin{cases} \mathcal{L}z = \partial_t z - \Delta z - f(z) = 0 \\ z(0,x) = \begin{cases} \epsilon\phi_R(x) \text{ si } x \in B_R \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Par comparaison, on a : $1 \geq u(1+t,x) \geq z(t,x)$.
Or $z(0,x)$ est sous-solution ($z(0,x) \leq u(1,x)$) et $\mathcal{L}z = 0$, donc d'après le lemme, $z(t,x)$ croît quand t croît.
Comme $z(t,x) \leq 1$ et $p(x) > 0$, on a la convergence simple : $z(t,x) \uparrow p(x)$ quand $t \to +\infty$.

Étape 2 : Le but est d'améliorer la convergence ponctuelle $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t,x) = p(x)$ afin de passer à la limite dans l'équation. Mais ce gain de régularité nécessite plusieurs outils théoriques : des estimations paraboliques intérieures a priori.

On a $z(t,x) \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}((0,\infty)\times\mathbb{R})$.
On définit $z_n(t,x) := z(t+n,x) \to p(x)$ quand $n \to +\infty$.
On a $\mathcal{L}(z_n) = 0$ i.e $\underbrace{\partial_t z_n - \Delta z_n}_{\text{linéaire}} = \underbrace{f(z_n)}_{\text{considéré comme un membre de droite}}$ sur $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$.
Posons $w_k = (1,2)\times(-k,k) \subset\subset (0,\infty)\times\mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$.

D'après les estimations paraboliques intérieures :

$$\begin{aligned}\|z_n\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{\omega_k})} &\leq C_k \left[\|f(z_n)\|_{\mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}((0,\infty)\times\mathbb{R})} + \|z_n\|_{\mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}((0,\infty)\times\mathbb{R})}\right] \\ &\leq C_k \max\Big(\|f\|_\infty, \mathrm{Lip}_{[0,1]}f + 1\Big)\|z\|_{\mathcal{C}^{\alpha/2,\alpha}((0,\infty)\times\mathbb{R})} \\ &\leq \tilde{C_k} \text{ constante indépendante de n}\end{aligned}$$

k=1 : $w_1 = (1,2)\times(-1,1)$
$\|z_n\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{\omega_1})} \leq \tilde{C_1}$
Mais on a l'injection compacte $\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{\omega_1}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{1,2}(\overline{\omega_1})$.
Donc il existe une sous-suite (z_{n_1}) de (z_n) qui converge vers une limite notée z dans $\mathcal{C}^{1,2}(\overline{\omega_1})$, et nécessairement, $z = p$.
k=2 : $w_2 = (1,2)\times(-2,2)$
$\|z_{n_1}\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{\omega_2})} \leq \tilde{C_2}$ et $\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{\omega_2}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{1,2}(\overline{\omega_2})$. Donc il existe une sous-suite (z_{n_2}) de (z_{n_1}) telle que $z_{n_2} \to z \equiv p$ dans $\mathcal{C}^{1,2}(\overline{\omega_2})$.
etc.

Par extraction diagonale, il existe une suite (z_{n_k}) extraite de (z_n) avec $\lim\limits_{k\to+\infty} z_{n_k} = p$ dans $\mathcal{C}^{1,2}_{loc}((1,2)\times\mathbb{R})$.
On peut alors passer à la limite dans

$$\partial_t z_{n_k} - \Delta z_{n_k} = f(z_{n_k})$$

D'où :

$$-\Delta p = f(p)$$

Étape 3 : On sait que

$$\begin{cases}-\Delta p = f(p) := p(1-p) \text{ sur } \mathbb{R} \\ 0 < p(x) \leq 1\end{cases}$$

But : Prouver que $p \equiv 1$.
Par l'absurde, supposons que $p \neq 1$. Par exemple, $p(0) < 1$.
On sait que

$$\begin{cases}-\Delta\phi_R = \lambda_R\phi_R \text{ dans } B_R := B(0,R) \\ \phi_R = 0 \text{ sur } \partial B_R \\ \phi_R > 0 \text{ et } \|\phi_R\|_{L^\infty} = 1 \text{ dans } B_R\end{cases}$$

$$\begin{aligned}-\Delta(\epsilon\phi_R) - f(\epsilon\phi_R) &= \epsilon\lambda_R\phi_R - \epsilon\phi_R(1-\epsilon\phi_R) \\ &= \epsilon\phi_R(\lambda_R - 1 + \epsilon\phi_R) \\ &\leq \epsilon\phi_R(\lambda_R - 1 + p(0)) \\ &\leq \epsilon\phi_R(\lambda_R - (1-p(0))) \\ &< 0 \text{ quand } R \text{ assez grand}\end{aligned}$$

Posons $\epsilon^\star := \sup\{\epsilon > 0; \forall x \in \overline{B_R}\ \epsilon\phi_R(x) \leq p(x)\}$.
$\epsilon^\star$ existe et appartient à $(0, p(0)]$. On pose enfin $w = \epsilon^\star - p \leq 0$ dans B_R. Par définition de $\epsilon^\star$, $w = 0$ en un point $x_0 \in \overline{B_R}$. Ce point $x_0 \notin \partial B_R$ (car les bords sont fixes).
Ainsi, $0 \geq \Delta w(x_0) = \epsilon^\star\Delta\phi_R(x_0) - \Delta p(x_0) > -f(\epsilon^\star\phi_R)(x_0) + f(p)(x_0) = 0$ car $w = 0$ en x_0.
Remarque : La dernière inégalité est stricte car $\epsilon^\star\phi_R$ sous-solution stricte.

5.1.2 Ondes progressives, lien avec Cauchy

$(EDP)\ :\ \partial_t u = \partial_{x^x} u + f(u)$.
On cherche des solutions voyageant à vitesse constante et gardant leur profil : $u(t,x) = \phi(x-ct)$, c constante.
L'équation devient :
$(EDO)\ :\ -c\phi'(z) = \phi''(z) + f(\phi(z))$, où $z = x - ct$.

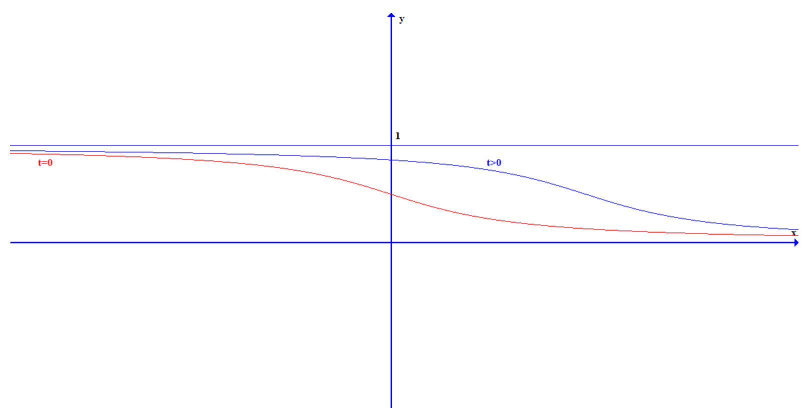
Définition : Une onde progressive (Travelling Wave, notée TW) est un couple (c,ϕ) tel que :

$$\begin{cases} \phi'' + c\phi' + f(\phi) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \phi(-\infty) = 1; \phi(+\infty) = 0 \\ \phi \geq 0 \end{cases}$$

Remarque : La solution de :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := \partial_t u - \Delta u - f(u) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \phi(x) \end{cases}$$

n'est autre que $u(t,x) = \phi(x-ct)$.



— Si $c^+ > c$, alors : $u(t,c^+t) = \phi((c^+ - c)t) \to \phi(+\infty) = 0$ quand $t \to +\infty$.
— Si $c^- < c$, alors : $u(t,c^-t) = \phi((c^- - c)t) \to \phi(-\infty) = 1$ quand $t \to -\infty$.
c est la **vitesse de propagation**.

Propriétés : On suppose que (c,ϕ) est une onde progressive. Alors on a :

1. $0 < \phi < 1$
2. $\phi'(\pm\infty) = 0$
3. $\phi' \in L^2(\mathbb{R})$ et c est du signe de $\displaystyle\int_0^1 f(u)du$ (> 0 pour Fisher-KPP)
4. $\phi' < 0$

Résultats sur les ondes progressives
On effectue une linéarisation formelle autour de l'équilibre instable $\phi \equiv 0$ (i.e $x \to +\infty$ très en avant du front).

$$(c,\phi) \text{ TW } \begin{cases} \phi'' + c\phi' + \phi(1-\phi) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \phi(-\infty) = 1; \phi(+\infty) = 0 \\ \phi \geq 0 \end{cases} \qquad \text{devient } \phi'' + c\phi' + \phi = 0 \text{ (EDO linéaire du 2ème ordre)}$$

$\Delta = c^2 - 4$ doit être positif ou nul. En effet, si $\Delta < 0$, ϕ s'exprime en cos, sin, et donc on a des oscillations autour de 0. On perd la propriété $\phi \geq 0$.
Or $c > 0$, donc $c \geq 2$.

Théorème : Il existe une onde progressive (c, ϕ) si et seulement si $c \geq c^\star = 2$.
$c^\star$ est la vitesse minimale des fronts KPP. De plus, pour tout $c \geq c^\star$, le profil ϕ_c est unique (à translations près).

Généralisation : L'équation $\partial_t u = D\partial^2_{xx}u + ru\left(1 - \dfrac{u}{K}\right),\ (t,x) \in \mathbb{R}^2$ admet des solutions positives de type front, $u(t,x) = \phi_c(x - ct)$, avec $\phi(-\infty) = K,\ \phi(+\infty) = 0$ si et seulement si $c \geq c^\star = 2\sqrt{rD}$.
De plus, $\forall c \geq c^\star$, le profil ϕ_c est unique (à translations près), strictement positif et strictement décroissant.

Théorème : Soit $u(t,x)$ une solution du problème de Cauchy

$$\text{(Pb)} \begin{cases} \partial_t u = D\partial^2_{xx}u + ru\left(1 - \dfrac{u}{K}\right),\ (t,x) \in \mathbb{R}^\star_+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec donnée initiale $u_0 \geq 0,\ u_0 \neq 0$ continue et à support compact (on suppose toujours u_0 régulière).
Cette solution converge vers le front de vitesse minimale au sens suivant :
$\lim\limits_{t\to+\infty} \sup\limits_{x\geq 0} |u(t,x) - \phi_{c^\star}(x - c^\star t + m_1(t))| = 0$
$\lim\limits_{t\to+\infty} \sup\limits_{x\leq 0} |u(t,x) - \phi_{c^\star}(-x - c^\star t + m_2(t))| = 0$
Les fonctions $m_i(t),\ (i = 1, 2)$ décrivant le décalage entre $u(t,x)$ et le front de vitesse minimale sont négligeables par rapport à t : $m_i(t) = \dfrac{3\sqrt{D}}{2\sqrt{r}} ln(t) + C_i,\ i = 1, 2,\ C_i$ constante.

Remarque : Ce résultat permet notamment de relier les paramètres r, D du modèle à la vitesse de colonisation. En effet, un observateur qui avancerait vers la droite avec une vitesse supérieure à $c^\star = 2\sqrt{rD}$ verrait la densité de population tendre vers 0, alors que s'il se déplaçait vers la droite avec une vitesse comprise entre 0 et $c^\star$, il verrait la densité de population tendre vers la capacité d'accueil K de l'environnement (idem vers la gauche). On dit que $c^\star$ est la vitesse asymptotique de propagation de la solution du problème de Cauchy (Pb).

□ Quid quand la densité de population initiale u_0 n'est pas à support compact ?

La solution du problème de Cauchy (Pb) peut converger vers un front de vitesse $c > c^\star$.
Formellement, posons $u_0(-\infty) = K,\ u_0(+\infty) = 0,\ u_0(x) \sim Ae^{-\lambda x}\ A, \lambda > 0$, avec u_0 décroissante :

$$\begin{cases} u_0(x) \sim Ae^{-\lambda x} \text{ quand } x \to +\infty \\ \quad\Downarrow \\ u(t,x) \sim Ae^{-\lambda(x-ct)} \text{ où c est à déterminer} \end{cases}$$

Considérons l'équation linéarisée :
$\partial_t u = D\partial^2_{xx}u + ru \quad (x >> 1)$
Cherchons des solutions du type front $u(t,x) = \phi_c(x - ct)$, avec $\phi_c(x) = Ae^{-\lambda x}$.
On obtient alors : $D\lambda^2 - c\lambda + r = 0$, d'où $c = D\lambda + \dfrac{r}{\lambda}$. En étudiant la fonction $c(\lambda) = D\lambda + \dfrac{r}{\lambda}$, on voit que c atteint son minimum quand $\lambda = \lambda^\star := \sqrt{r/D}$.

1. $0 < \lambda < \lambda^\star$: la vitesse de propagation est égale à $D\lambda + \dfrac{r}{\lambda} > c^\star = 2\sqrt{rD}$
2. $\lambda = \lambda^\star$: la vitesse de propagation est égale à $D\lambda + \dfrac{r}{\lambda} = 2\sqrt{rD} = c^\star$

3. $\lambda > \lambda^\star : e^{-\lambda x} \leq e^{-\lambda^\star x}$.
   Par comparaison parabolique en domaine non borné ($\Omega = \mathbb{R}$), la vitesse de propagation avec $\lambda > \lambda^\star$ est inférieure ou égale à $c^\star = 2\sqrt{rD}$ (vitesse minimale). D'où $c^\star = 2\sqrt{rD}$.

Formellement, quand $\lambda \to +\infty$, $u_0(x) \equiv 0$ quand $x \to +\infty$. On retrouve la donnée à support compact.

Théorème : Soit $u(t,x)$ la solution du problème de Cauchy (Pb) avec donnée initiale $u_0 \geq 0$, décroissante, telle que $u_0(-\infty) = K,\ u_0(+\infty) = 0,\ u_0(x) \sim Ae^{-\lambda x}\ A, \lambda > 0$. cette solution converge vers l'unique front de vitesse c vérifiant : $\begin{cases} c = c^\star = 2\sqrt{rD} \text{ si } \lambda \geq \lambda^\star = \sqrt{r/D} \\ c = D\lambda + \dfrac{r}{\lambda} \text{ si } \lambda < \lambda^\star \end{cases}$
La convergence a lieu au sens suivant :

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t,x) - \phi_c(x - ct + m(t) + c)| = 0$$

où $c > 0,\ m(t) = o(t)$ en $+\infty$ et $m(t) \equiv 0$ quand $\lambda < \lambda^\star$.

Remarque : Plus la donnée initiale est à décroissance rapide, plus le front sélectionné est lent, jusqu'au seuil $\lambda^\star$ à partir duquel la vitesse de propagation ne dépend plus de la vitesse de décroissance de u_0, et est égale à la vitesse que l'on obtiendrait avec u_0 à support compact. En gros, pour Fisher-KPP, la linéarisation autour de $u \equiv 0$ dit tout ! En particulier, les queues de la condition initiale u_0 sélectionnent la vitesse de propagation.

Pour les phénomènes d'accélération, on peut consulter Roques[1,p82-84]

5.2 EDP avec effet Allee

Considérons le modèle en dimension 1 d'espace et dans un milieu homogène non borné :

$$(\mathcal{P})\quad \partial_t u = D\partial_{xx}^2 u + ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)(u - \rho),\ (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

avec $r, K > 0$ et $\rho \in]0, K[$.

5.3 Équation hétérogène en domaine borné

On transforme $f(u) = u(1-u)$ cas modèle pour Fisher-KPP en $f(x,u) = u(r(x) - \gamma(x)u)$, où $r(x)$ est le taux de croissance intrinsèque dépendant de la position. Cette quantité est donc positive ou négative. $\gamma(x)$ est un terme de compétition dépendant de la position. Il est toujours positif.

On regarde l'équation :

$$(\star)\quad \begin{cases} \partial_t u = D\Delta u + u(r(x) - \gamma(x)u),\ t \geq 0,\ x \in \Omega \\ \text{Condition de Dirichlet ou de Neumann} \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0,\ \text{bornée},\ x \in \Omega \end{cases}$$

Remarque : le taux de croissance per capita $\dfrac{f(x,u)}{u} = r(x) - \gamma(x)u$ est une fonction strictement décroissante de u, et atteint son maximum quand $u \equiv 0$ i.e situation de Fisher-KPP.

Hypothèses de régularité : $r, \gamma \in Lip(\overline{\Omega})$. Par compacité de $\overline{\Omega}$, $\gamma > \gamma_{min} > 0$.
$u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ + conditions de compatibilité.

— 0 est sous-solution de $(\star)$

— La grande constante (positive) $\max\left(\frac{\|r\|_\infty}{\gamma_{min}}, \|u_0\|_\infty\right)$ est sur-solution de $(\star)$.

Un théorème de comparaison rappelé précédemment nous assure alors de l'existence d'une unique solution $u \in \mathcal{C}([0,T]\times\Omega)$. En fait, cette solution appartient à $\mathcal{C}([0,\infty)\times\Omega)$ car on a pas "explosion". De plus, $0 \leq u \leq$ Grande constante.

Question : Quid de u quand $t \to +\infty$?

États stationnaires

But : trouver $p = p(x) \geq 0$ solution de $\begin{cases} -D\Delta p - p(r(x) - \gamma(x)p) = 0 \text{ sur } \Omega \\ p = 0 \text{ ou } \dfrac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$

$p \equiv 0$ convient. Y a-t-il d'autres solutions (ce sont les candidats pour décrire $u(t,x)$ quand t tend vers $+\infty$) ?

La réponse est donnée par le signe de la valeur propre principale du linéarisé autour de $p \equiv 0$.

Ici $\mathcal{L}\psi := -D\Delta\psi - r(x)\psi$.

Notons (λ_1, ψ) le couple valeur propre principale, fonction propre associée à $\mathcal{L}$.

Théorème : Si $\lambda_1 < 0$, alors il existe $p(x) \geq 0,\ p(x) \not\equiv 0$ état stationnaire.

Théorème : Si $\lambda_1 \geq 0$, alors $p \equiv 0$ est le seul état stationnaire positif.

6 La théorie des semi-groupes pour les EDP semi-linéaires

6.1 Opérateurs m-dissipatifs

$(X, \|.\|)$ désigne un espace de Banach.

6.1.1 Définitions et propriétés de base

Définition : Un opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ est dit **dissipatif** si :

$$\forall\lambda > 0\ \forall x \in D(A)\ \|x - \lambda Ax\| \geq \|x\|$$

Remarque : Soit $f \in X$. S'il existe $x \in D(A)$ solution de $x - \lambda Ax = f$, alors A dissipatif nous dit que $\|x\| \leq \|f\|$.

Définition : Un opérateur A est dit **m-dissipatif** si :

1. A est dissipatif
2. $\forall\lambda > 0\ \forall f \in X\ \exists x \in D(A)\ x - \lambda Ax = f$ i.e $\forall\lambda > 0,\ I - \lambda A : D(A) \to X$ surjectif.

Lemme et définition :

1. Si $A : D(A) \subset X \to X$ est m-dissipatif, alors $\forall\lambda > 0\ \forall f \in X$ l'équation $x - \lambda Ax = f$ a une unique solution u telle que $\|u\| \leq \|f\|$.
2. L'application
$$J_\lambda : \begin{cases} X \to D(A) \\ f \mapsto u \text{ unique solution de } u - \lambda Au = f \end{cases}$$
est une contraction sur X, linéaire, bijective de X sur $D(A)$. On posera $\boxed{J_\lambda := (I - \lambda A)^{-1}}$.

Proposition : Si A est m-dissipatif, alors le graphe de A, $G(A)$ est fermé dans $X \times X$.

Corollaire : Soit A un opérateur m-dissipatif et $u \in D(A)$. On pose
- $\|u\|_{D(A)} := \|u\| + \|Au\|$ (norme du graphe)
- $|||.||| := \|u - Au\| = \|(I - A)u\|$ (intermédiaire utile)

1. $\|.\|_{D(A)}$ est une norme sur $D(A)$ et $\big(D(A), \|.\|_{D(A)}\big)$ est un espace de Banach.
2. $\big(D(A), \|.\|_{D(A)}\big) \hookrightarrow (X, \|.\|)$
3. $|||.||| \sim \|.\|_{D(A)}$.
4. J_1 isomorphisme de $(X, \|.\|)$ sur $\big(D(A), \|.\|_{D(A)}\big)$.

Quand on parlera de $D(A)$, on sous-entendra désormais l'espace de Banach $\big(D(A), \|.\|_{D(A)}\big)$.

Corollaire : $\forall \lambda > 0,\ J_\lambda \in \mathcal{L}(X, D(A))$.

Définition : Soit A un opérateur m-dissipatif et $\lambda > 0$.
On pose $\boxed{A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(J_\lambda - I)}$. A_λ s'appelle **l'approximée de Yosida** de A.

Lemme :
1. $\forall x \in X,\ A_\lambda x = A(J_\lambda x)$
2. $\forall x \in D(A),\ A_\lambda x = J_\lambda(Ax)$
3. $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ et $\|A_\lambda\| \leq 2/\lambda$
4. $J_{\lambda|D(A)} \in \mathcal{L}(D(A))$ et $\|J_{\lambda|D(A)}\| \leq 1$
5. A_λ est m-dissipatif

Remarque : Si A est m-dissipatif et X est réflexif, alors $D(A)$ est dense dans X.

Proposition : Soit A m-dissipatif, $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ et on suppose que $D(A)$ est dense dans X (pour la norme de X). Alors :
1. $\forall \lambda > 0\ \forall x \in D(A)\ \|J_\lambda x - x\| \leq \lambda \|Ax\|$
2. $\forall x \in X\ \|J_\lambda x - x\| \to 0$ quand $\lambda \to 0$
3. $\forall x \in D(A)\ \|A_\lambda x - x\| \to 0$ quand $\lambda \to 0$
4. $\forall x \in D(A)\ \|J_\lambda x - x\|_{D(A)} \to 0$ quand $\lambda \to 0$

Proposition (très utile) : Supposons que A est dissipatif. Alors :
A est m-dissipatif si et seulement si il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\forall f \in X,\ x - \lambda_0 Ax = f$ est résoluble.

Remarque technique : Cette dernière proposition nous permet de chercher un "bon λ" qui résout $x - \lambda Ax = f$ pour tout $f \in X$ pour conclure à la m-dissipativité de A.

Corollaire : Si $A \in \mathcal{L}(X)$ et si A est dissipatif, alors A est m-dissipatif.

Corollaire (très utile) : Soient A et B deux opérateurs linéaires non bornés. Supposons que :
1. B est dissipatif
2. $G(A) \subset G(B)$
3. $R(I - A) = X$

Alors $A = B$ et A est m-dissipatif.

Corollaire : Soient A et B deux opérateurs m-dissipatifs tels que $G(A) = G(B)$. Alors $A = B$.

6.1.2 Restriction et extrapolation

Théorème : Soit A un opérateur m-dissipatif, de domaine dense.
Posons $X_1 = (D(A), \|.\|_{D(A)})$. A_1 est l'opérateur linéaire sur X_1 défini par :

$$\begin{cases} D(A_1) = \{x \in X_1; Ax \in X_1\} \subset D(A) = X_1 \\ A_1 x = Ax \; \forall x \in D(A_1) \end{cases}$$

Alors A_1 est un opérateur m-dissipatif et $D(A_1)$ est dense dans X_1.

Remarque : On a *restreint* l'opérateur non borné A en un opérateur A_1 dont le domaine $D(A_1)$ est constitué des éléments de $D(A)$ stables par A.

On peut continuer l'opération de restriction précédente en définissant :

$$\begin{cases} D(A_2) = \{x \in D(A_1); Ax \in D(A_1)\} \\ A_2 x = A(Ax) \; \forall x \in D(A_2) \end{cases}$$

De manière générale,

$$\begin{cases} D(A_n) = \{x \in D(A_{n-1}); Ax \in D(A_{n-1})\} \\ A_n x = A^{n-1}(Ax) \; \forall x \in D(A_n) \end{cases}$$

Théorème : Soit A un opérateur m-dissipatif, de domaine dense. Alors il existe un espace de Banach X_{-1} et un opérateur A_{-1} sur X_{-1} tel que :

1. $X \hookrightarrow X_{-1}$ avec injection dense
2. $\forall x \in X \; \|x\|_{X_{-1}} = \|J_1 x\|$
3. A_{-1} est m-dissipatif dans X_{-1}
4. $D(A_{-1}) = X$
5. $\forall x \in D(A) \; A_{-1}x = Ax$

Remarque : on a *extrapolé* l'opérateur non borné A en un opérateur A_{-1} de domaine $D(A_{-1}) = X$.

De même, on peut construire $X \hookrightarrow X_{-1} \hookrightarrow X_{-2} \dots$
Restriction et extrapolation commutent :

$$(X_1)_{-1} = X = (X_{-1})_1$$

6.1.3 Cas des espaces de Hilbert

$(X, (.,.))$ est un espace de Hilbert réel de norme associée $|.|$

Lemme (utile) : Soit A un opérateur linéaire sur X. A est dissipatif si et seulement si $\forall x \in D(A) \; (Ax, x) \leq 0$.

Lemme : Si A est m-dissipatif, alors $D(A)$ est dense dans X.

Remarque : tous les espaces de restriction et d'extrapolation X_n $(n \in \mathbb{Z})$ sont des espaces de Hilbert.
Exemple :

— X_1 : $(x, y)_{X_1} = (x, y)_X + (Ax, Ay)_X$
— X_{-1} : $(x, y)_{X_{-1}} = (J_1 x, J_1 y)_X$

Lorsqu'un opérateur A est m-dissipatif, alors $D(A)$ est dense dans X. On peut donc alors définir sans problème son adjoint $A^\star$:

— $D(A^\star) := \{x \in X; \exists C > 0\ \forall y \in D(A)\ |(x, Ay)| \leq C\|y\|\}$
— $\forall u \in D(A)\ \forall v \in D(A^\star)\ (A^\star v, u) = (v, Au)$

$G(A^\star)$ est fermé dans $X \times X$.
Si $B \in \mathcal{L}(X)$, alors $(A+B)^\star = A^\star + B^\star$.

Proposition : $\overline{R(A)}^\perp = \{v \in D(A^\star); A^\star v = 0\}$.

Théorème (utile) : Soit A un opérateur linéaire dissipatif dans X, de domaine dense . Alors A est m-dissipatif si et seulement si $A^\star$ est dissipatif et $G(A)$ fermé.

Définition : Soit A un opérateur linéaire dans X, de domaine dense. On dit que A est **auto-adjoint** (resp. **anti-adjoint**) si $A^\star = A$ (resp. si $A^\star = -A$).

Corollaire : Si A est un opérateur auto-adjoint dans X et si $A \leq 0$ (i.e $(Au, u) \leq 0\ \forall u \in D(A)$), alors A est m-dissipatif.

Corollaire : Si A est un opérateur anti-adjoint dans X, alors A et $-A$ sont m-dissipatifs.

Corollaire : Soit A un opérateur linéaire dans X, de domaine dense tel que $G(A) \subset G(A^\star)$ et $A \leq 0$) (i.e A dissipatif). Alors : A est m-dissipatif si et seulement si A est auto-adjoint.

Corollaire : Soit$A$ un opérateur linéaire dans X, de domaine dense. Alors A et $-A$ sont m-dissipatifs si et seulement si A est anti-adjoint.

Proposition : Soit A un opérateur m-dissipatif. Alors :

1. $A^\star$ est m-dissipatif
2. $(I - \lambda A^\star)^{-1} = [(I - \lambda A)^{-1}]^\star$
3. $(A^\star)_\lambda = (A_\lambda)^\star$

Cas des espaces de Hilbert complexes

Dans ce paragraphe, on suppose que X est un espace de Hilbert complexe i.e qu'il existe une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire continue $b : X \times X \to \mathbb{C}$ telle que :
— $b(iu, v) = ib(u, v)\ \forall (u, v) \in X \times X$
— $b(v, u) = \overline{b(u, v)}$
— $b(u, u) = \|u\|^2\ \forall u \in X$
Dans ce cas, $(u, v) := Re\,(b(u, v))$ définit un produit scalaire réel sur X qui fait de X un espace de Hilbert **réel**.

Soit A un opérateur linéaire sur l'espace de Hilbert réel X. Si A est $\mathbb{C}$-linéaire, on peut définir iA comme un opérateur linéaire sur l'espace de Hilbert réel X.

Proposition : Supposons que $D(A)$ est dense dans X. Alors $A^\star$ est $\mathbb{C}$-linéaire et on a $(iA)^\star = -iA^\star$.

Corollaire : Si A est auto-adjoint, alors iA est anti-adjoint.

6.2 Théorème de Hille-Yosida-Phillips

Rappels : Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$.
Définition : $e^A := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n$.

On a convergence normale dans $\mathcal{L}(X)$ et $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$. De plus, si A et B commutent, on a $e^{A+B} = e^A e^B$.
Enfin, pour tout A fixé, $t \mapsto e^{tA} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$ et $\dfrac{d}{dt}(e^{tA}) = e^{tA}A = Ae^{tA}$.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Pour tout $T > 0$ et pour tout $x \in X$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0,T], X)$ du problème :
$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \ \forall t \in [0,T] \\ u(0) = x \end{cases}$$
Cette solution est $u(t) = e^{tA}x$.

6.2.1 Semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif

Soit X un espace de Banach et A un opérateur m-dissipatif de domaine dense. Pour $\lambda > 0$ on considère les opérateurs J_λ et A_λ définis à la section précédente :

$$\begin{cases} J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1} \\ A_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}(J_\lambda - I) \end{cases}$$

et on pose $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda} \ \forall t \geq 0$.

Théorème :

1. $\forall x \in X$ la suite de fonctions $u_\lambda(t) = T_\lambda(t)x$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné $[0,T]$ vers une fonction $u \in \mathcal{C}([0,T], X)$ quand λ tend vers 0. On pose alors $T(t)x = u(t) \ \forall x \in X \ \forall t \geq 0$
2. (i) $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ et $\forall t \geq 0 \ \|T(t)\| \leq 1$
   (ii) $T(0) = I$
   (iii) $T(t+s) = T(t)T(s) \ \forall s,t \geq 0$
3. De plus, $\forall x \in D(A)$ $u(t)$ est l'unique solution du problème :
   $u \in \mathcal{C}^1([0,\infty), D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), X)$ avec $\begin{cases} u'(t) = Au(t) \ \forall t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$
4. Enfin, $\forall x \in D(A) \ \forall t \geq 0 \ \ T(t)Ax = AT(t)x$

Dans ce qui suit, on suppose que X est un espace de Hilbert réel. Le résultat qui suit précise le théorème précédent.

Théorème : On suppose que A est auto-adjoint ≤ 0. Soit $x \in X$ et $u(t) = T(t)x$. Alors u est l'unique solution du problème : trouver

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,\infty), X) \cap \mathcal{C}((0,\infty), D(A)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty), X) \\ u'(t) = Au(t) \ \forall t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

De plus on a :
(i) $\|Au(t)\| \leq \dfrac{1}{t\sqrt{2}}\|x\|$
(ii) $-(Au(t), u(t)) \leq \dfrac{1}{2t}\|x\|^2$
(iii) Si $x \in D(A)$, alors $\|Au(t)\|^2 \leq -\dfrac{1}{2t}(Ax, x)$

Remarque : $T(t)$ a un effet régularisant sur la donnée initiale. En effet, même si $x \notin D(A)$, on a $T(t)x \in D(A)\ \forall t > 0$.

Théorème : On suppose que A est anti-adjoint. Alors $T(t)$ s'étend à *un groupe à un paramètre* $T(t) : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ tel que :

1. $\forall x \in X\ T(t)x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, X)$
2. $\forall x \in X\ \forall t \in \mathbb{R}\ \|T(t)x\| = \|x\|$
3. $T(0) = I$
4. $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2\ T(t+s) = T(s)T(t)$
5. $\forall x \in D(A)\ u(t) = T(t)x$ vérifie $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, D(A)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, X)$ et $u'(t) = Au(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

Corollaire : Avec les notations du théorème précédent, on a : $(T(t))^\star = T(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.

6.2.2 Semi-groupes de contraction et leurs générateurs

Avant de définir la notion de semi-groupes de contraction, touchons un mot sur la notion de solutions faibles au problème $u \in \mathcal{C}^1([0,\infty), D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), X)$ avec $\begin{cases} u'(t) = Au(t)\ \forall t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$.

On a vu précédemment que pour tout $x \in D(A)$, on a défini $u(t) = T(t)x$ comme l'unique solution de ce problème.

Lorsque X est un espace de Hilbert et A un opérateur auto-adjoint, $T(t)x$ est encore la solution du problème : trouver

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,\infty), X) \cap \mathcal{C}((0,\infty), D(A)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty), X) \\ u'(t) = Au(t)\ \forall t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Cependant, lorsque $x \notin D(A)$, $T(t)x$ n'est pas différentiable à valeurs dans X et ne peut satisfaire $u'(t) = Au(t)\ \forall t > 0$. Heureusement, la notion d'extrapolation permet d'identifier $T(t)x$. Nous nous replaçons donc dans ce cadre et notons $T(t)$ et $S(t)$ les semi-groupes associés à A et à B.

Lemme : Pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, on a : $T(t)x = S(t)x$.

Corollaire : Soit $x \in X$. Alors $u(t) = T(t)x$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,\infty), X) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), Y) \\ u'(t) = Bu(t)\ \forall t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Définition : Une famille à un paramètre $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires continus est dite *semi-groupe de contractions* sur X si :

1. $\|T(t)\| = 1\ \forall t \geq 0$
2. $T(0) = I$
3. $T(t+s) = T(t)T(s)\ \forall s,t \geq 0$
4. $\forall x \in X\ T(t)x \in \mathcal{C}([0,\infty[, X)$

Définition : Le générateur infinitésimal de $T(t)$ est l'opérateur L défini par :

$$D(L) = \{x \in X; \frac{T(h)x - x}{h} \text{ a une limite dans } X \text{ quand } h \downarrow 0\}$$

$$Lx = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h}, \ \forall x \in D(L)$$

Proposition : Soit $T(t)$ un semi-groupe de contractions sur X, et L son générateur. Alors L est m-dissipatif et $D(L)$ est dense.

Théorème (de Hille-Yosida-Philips) : Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions si et seulement si A est m-dissipatif, de domainde dense.

Proposition : Soit A un opérateur m-dissipatif, de domaine dense. Supposons que A est le générateur d'un semi-groupe $S(t)$ de contractions. Alors $S(t)$ est le semi-groupe associé à A par le premier théorème de cette section.

Définition : Une famille à un paramètre $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ d'opérateurs linéaires continus est dite groupe d'isométries sur X si :

1. $\|T(t)x\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$ et $t \in \mathbb{R}$,
2. $T(0) = I$,
3. $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,
4. $T(t)x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, X)$ pour tout $x \in X$.

Proposition : Soit A un opérateur m-dissipatif de domaine dense, et soit $T(t)$ le semi-groupe de contractions engendré par A. Alors $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ est la restriction à $\mathbb{R}^+$ d'un groupe d'isométries si et seulement si $-A$ est m-dissipatif.

6.3 Problèmes semi-linéaires abstraits

Dans cette section, X est un espace de Banach et A un opérateur m-dissipatif, de domaine dense. On note $T(t)$ le semi-groupe de contractions engendré par A.

6.3.1 Équations non-homogènes

Soit $T > 0$. Pour $x \in X$ et $f : [0, T] \to X$ donnés, on veut résoudre le problème :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,T], D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], X) \ \ (1) \\ u'(t) = Au(t) + f(t), \ \forall t \in [0,T] \ \ (2) \\ u(0) = x \ \ (3) \end{cases}$$

On dispose comme pour les équations différentielles de la formule de Duhamel (variation de la constante).

Lemme (formule de Duhamel) : Soit $x \in D(A)$ et $f \in \mathcal{C}([0,T], X)$. On considère une solution $u \in \mathcal{C}([0,T], D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], X)$ du problème précédent. Alors on a :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,T] \ \ (4)$$

Corollaire : Pour tout $x \in D(A)$ et $f \in \mathcal{C}([0,T], X)$, le problème $(1)-(3)$ possède au plus une solution.

Remarque : la formule de Duhamel définit une fonction $u \in \mathcal{C}([0,T], X)$. Cherchons des conditions suffisantes pour que cette fonction soit solution du problème $(1)-(3)$.

6.4 Applications à l'équation de la chaleur semi-linéaire

6.5 Solutions globales

6.6 Un peu de systèmes dynamiques

7 Équations avec transport

7.1 Interlude théorique

7.2 Modèles d'advection - diffusion

7.3 Modèles d'advection - diffusion - réaction

8 Systèmes d'EDP

Nous étudierons à terme les systèmes d'EDP du type :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = r_1 \left(1 - \dfrac{u_1 + u_2}{K}\right) u_1 - \nabla.(D\nabla u_1) - \vec{v_1}.\nabla u_1 - c(u_1, u_2, R) \\ \partial_t u_2 = r_2 \left(1 - \dfrac{u_1 + u_2}{K}\right) u_2 - \nabla.(D\nabla u_2) - \vec{v_2}.\nabla u_2 - c(u_1, u_2, R) \end{cases}$$

où $r_i \left(1 - \dfrac{u_1 + u_2}{K}\right) u_i$ représente le terme de réaction, K la capacité du milieu, $-\nabla.(D\nabla u_i)$ le terme de diffusion, $-\vec{v_i}.\nabla u_i$ le terme d'advection pour l'espèce i et $-c(u_1, u_2, R)$ un terme source, R désignant la ressource du milieu.

8.1 couplages d'EDP

8.2 Systèmes de Turing

9 Annexes

9.1 Espaces de Hilbert - Théorie des opérateurs - Théorie spectrale

9.1.1 Généralités sur les Hilbert - Bases Hilbertiennes

On suppose connue la définition d'un espace de Hilbert, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de projection sur un convexe fermé. On pourra par exemple consulter Brézis[1] ou Hirsch-Lacombe[1].

Dans toute la suite, H désigne un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)$, de norme associée $|.|$.

Théorème de représentation de Riesz : Soit $\phi \in H'$. Il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\forall v \in H \quad \langle \phi, v \rangle = (f, v)$$

De plus, on a $|f| = \|\phi\|_{H'}$

Remarque : Ainsi, toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet donc d'identifier H et H'.
Presque toujours cette identification sera effectuée, mais pas tout le temps ! Comme nous l'apprend Brézis[1, chapitre 5], Si V désigne un autre espace de Hilbert, muni de son propre produit scalaire $((.,.))$, de norme $\|.\|$ tel que $V \subset H$, on a $V \subset H = H' \subset V'$ (injections canoniques continues et denses). On ne peut alors identifier V à V'. Le choix de l'identification de H et H' est le plus courant. On dit que H est l'espace pivot.

Le théorème suivant est de grande utilité pour résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques. Il contient de plus un résultat de minimisation d'une fonctionnelle.

Théorème de Lax-Milgram : Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire sur $H \times H$ qui est
- continue : il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $u, v \in H$ $|a(u, v)| \leq M|u||v|$.
- coercive : il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in H$ $|a(u, u)| \geq \alpha|u|^2$.

Alors, pour tout $\phi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall v \in H \;\; a(u, v) = \langle \phi, v \rangle$.
De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :
$u \in H$ et $\dfrac{1}{2}a(u, u) - \langle \phi, u \rangle = \mathrm{Min}_{v \in H} \left\{ \dfrac{1}{2}a(v, v) - \langle \phi, v \rangle \right\}$.

Définition : Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-espaces fermés de H. On dit que H est **somme Hilbertienne** des (E_n), et on note $H = \oplus_n E_n$ si :
1. $\forall u \in E_m,\ \forall v \in E_n,\ (m \neq n)\ \ (u, v) = 0$
2. L'espace vectoriel engendré (au sens algébrique) par les (E_n) est dense dans H.

Proposition : On suppose que H est somme Hilbertienne des (E_n). Soit $u \in H$ et $u_n = P_{E_n} u$ la projection orthogonale de u sur E_n. Alors :
1. $u = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ i.e $u = \displaystyle\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n$.
2. $|u|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2$ (égalité de Bessel-Parseval)

Réciproquement, si une suite (u_n) d'éléments de H est telle que $\forall n \; u_n \in E_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente et $u = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ vérifie $u_n = P_{E_n} u$.

Définition : On appelle **base Hilbertienne** une suite (e_n) d'éléments de H telle que :

1. $\forall n\ |e_n| = 1$ et $\forall m, n\ (m \neq n)\ (e_m, e_n) = 0$.
2. L'espace vectoriel engendré par les e_n est dense dans H.

Il résulte en particulier de la proposition précédente que si (e_n) est une base Hilbertienne de H, alors tout $u \in H$ s'écrit :

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad \text{avec} \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(u, e_n)|^2$$

Théorème : Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

C'est le cas par exemple des espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$.

9.1.2 Théorie des opérateurs

La majorité des résultats énoncés ici sont tirés des ouvrages de Brézis[1] ou de Cazenave-Haraux[1]. Ils sont cependant essentiels pour la théorie de Hille-Yosida.

Définition : E et F désignent deux espaces de Banach.

1. On appelle opérateur linéaire non borné de E dans F toute application linéaire $A : D(A) \subset E \to F$, définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$, à valeurs dans F.
2. $D(A)$ s'appelle le domaine de A.
3. On dit que A est borné s'il existe un réel $c \geq 0$ tel que pour tout $u \in D(A)$ $\|Au\| \leq c\|u\|$.
4. Le graphe de A, noté $G(A)$ est $\{(u, Au); u \in D(A)\}$.
5. On dit que l'opérateur A est fermé si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.
6. L'image de A est notée $R(A)$

Remarques :

1. Si A est borné, c'est la restriction à $D(A)$ d'un opérateur $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\tilde{E}, F)$ où $\tilde{E}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E contenant $D(A)$.
2. Si $D(A) = E$, le théorème du graphe fermé nous assure que $A \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.

Point technique : Pour prouver qu'un opérateur A est fermé dans $E \times F$, on prend (u_n) une suite d'éléments de $D(A) \subset E$ telle que $u_n \to u$ et $Au_n \to f$, et on prouve alors que :

1. $u \in D(A)$
2. $Au = f$

Définition : Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire continu $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit compact si $T(B_E)$ est d'adhérence compacte.

Proposition : Soient E, F, G et H des espaces de Banach. Supposons $T \in \mathcal{L}(F, G)$ compact. Si $U \in \mathcal{L}(E, F)$ et $V \in \mathcal{L}(G, H)$, alors : $VTU \in \mathcal{L}(E, H)$ est compact.

9.1.3 Théorie spectrale - Propriétés spectrales du Laplacien

Nous rappelons d'abord quelques résultats généraux sur les opérateurs autoadjoints compacts.

Définition : Un opérateur linéaire continu $A \in \mathcal{L}(H)$ d'un espace de Hilbert H est dit autoadjoint si $A^* = A$ i.e $\forall u, v \in H \quad (Au, v) = (u, Av)$.

Le résultat suivant généralise le théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques en dimension finie.

Théorème : On suppose que l'espace de Hilbert H est séparable. Soit T un opérateur autoadjoint compact. Alors :
- H admet une base Hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ formée de vecteurs propres de T : $Te_n = \lambda_n e_n \ \ \forall n \geq 1$.
- Chaque valeur propre λ_n est de multiplicité finie et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.
- Si de plus T est défini positif : $\forall x \neq 0 \in H \ (Tx, x) > 0$, alors $\forall n \geq 1, \ \lambda_n > 0$.

Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{L} = \mathrm{div}(A(x)\nabla)$ un opérateur elliptique sous forme divergence. On se place sous les hypothèses :

1. $(\exists \alpha_0, \alpha_1 > 0)(\forall x \in \Omega)(\forall \xi_i, \xi_j \in \mathbb{R}^N) \ \alpha_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha_1 |\xi|^2$
2. Les fonctions a_{ij} sont bornées sur Ω et vérifient $a_{ij} = a_{ji}$

Soit c une fonction continue définie sur $\overline{\Omega}$.

Théorème : Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite croissante $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \cdots \to +\infty$ tels que $\forall n \geq 1 \ e_n \in H_0^1(\Omega)$ et vérifiant :

$$(I_n) \begin{cases} -\mathrm{div}(A(x)\nabla e_n) - ce_n = \lambda_n e_n \ \ \text{sur } \Omega \\ e_n = 0 \ \ \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Si de plus $c(x) \leq 0 \ \forall x \in \Omega$, alors $\forall n \geq 1 \ \lambda_n > 0$.

Ce théorème est très pratique car il permet de décrire les solutions de certains problèmes d'évolution. En particularisant le résultat précédent au cas du Laplacien i.e la matrice $A(x)$ est égale à l'identité, on obtient le résultat suivant :

Proposition : Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite croissante $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \cdots \to +\infty$ tels que $\forall n \geq 1 \ e_n \in H_0^1(\Omega)$ et vérifiant :

$$(I_n) \begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n \ \ \text{sur } \Omega \\ e_n = 0 \ \ \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus, chaque valeur propre λ_n est de multiplicité finie et $\left(\dfrac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)_{n\geq 1}$ est une base Hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.

Propriétés :

1. Si Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, alors $\forall n \geq 1, \quad e_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.
2. $\lambda_1 > 0$, première valeur propre de $-\Delta$ (avec Dirichlet homogène) est telle que
$$\lambda_1 = \mathrm{Min}\left\{\int_\Omega \nabla u^2 / \int_\Omega u^2 \ ; \ u \in H_0^1(\Omega) \text{ et } u \neq 0\right\}$$
3. λ_1 est valeur propre simple i.e $\mathrm{Ker}(-\Delta - \lambda_1 Id) = \mathbb{R}e_1$, et donc $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \ldots$
4. On a $e_1 > 0$ (ou $e_1 < 0$) et ceci caractérise λ_1.

Définition : λ_1 est appelée *valeur propre principale* de $-\Delta$.

Généralisons le résultat précédent...

Théorème de Krein-Rutman : Supposons c lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$. Il existe un unique couple $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (valeur propre principale de $\mathcal{L}$) et $\phi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ (fonction propre principale de $\mathcal{L}$) vérifiant :

1. Cas Dirichlet :
$$\begin{cases} -D\Delta\phi - c(x)\phi = \lambda_1\phi \text{ dans } \Omega \\ \phi(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \phi > 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \max_{\overline{\Omega}} \phi = 1 \end{cases}$$
La valeur propre λ_1 est la plus petite valeur propre de l'opérateur $\mathcal{L} := -D\Delta - c(x)$ avec condition de Dirichlet. De plus, on a la formule de Rayleigh suivante :
$$\lambda_1 = \text{Min}\left\{\int_\Omega (D|\nabla\psi|^2(x) - c(x)\psi^2(x))dx / \int_\Omega \psi^2(x)dx;\ \psi \in H_1^0(\Omega), \psi \neq 0\right\}$$
2. Cas Neumann :
$$\begin{cases} -D\Delta\phi - c(x)\phi = \lambda_1\phi \text{ dans } \Omega \\ \phi(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \phi > 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \max_{\overline{\Omega}} \phi = 1 \end{cases}$$
La valeur propre λ_1 est la plus petite valeur propre de l'opérateur $\mathcal{L} := -D\Delta - c(x)$ avec condition de Neumann. De plus, on a la formule de Rayleigh suivante :
$$\lambda_1 = \text{Min}\left\{\int_\Omega (D|\nabla\psi|^2(x) - c(x)\psi^2(x))dx / \int_\Omega \psi^2(x)dx;\ \psi \in H_1(\Omega), \psi \neq 0\right\}$$

Remarque : Comme le min pour Neumann est pris sur $H_1(\Omega)$ et non plus sur $H_1^0(\Omega)$, on a nécessairement $\lambda_1(\text{Neumann}) \leq \lambda_1(\text{Dirichlet})$.

9.2 Espaces de fonctions continues et espaces de Hölder

9.2.1 Définition et propriétés utiles

Remarque importante : La topologie d'un espace normé X (plus généralement d'un espace métrisable) est entièrement déterminée par ses suites convergentes (topologie séquentielle). Soit (Y, Θ) un espace topologique, pas nécessairement normé ou métrisable.
Une application $f : (X, \|.\|_X) \longrightarrow (Y, \Theta)$ est continue en $x \in X$ si pour toute suite (x_n) de X convergeant vers x dans X (i.e $\|x_n - x\|_X \to 0$), la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ dans Y. Ce résultat reste valable pour n'importe quel espace topologique X dont la topologie est définie par ses suites convergentes.

Définition :

1. Pour tout entier naturel m, $\mathcal{C}^m(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{C}(\Omega); \forall|\alpha| \leq m, D^\alpha\phi \in \mathcal{C}(\Omega)\}$. On a $\mathcal{C}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$.
2. $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^m(\Omega)$
3. $\mathcal{C}_0(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{C}(\Omega);\ \text{Supp } \phi \text{ est compact dans } \Omega\}$

On note $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Nous allons préciser maintenant quelques propriétés de l'espace $\mathcal{C}(X)$, espace des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, où (X, d_X) est un espace métrique compact. Un outil très utile sera explicité : le théorème d'Arzela-Ascoli.

Théorème (de prolongement des applications uniformément continues) : Soit $\phi \in \mathcal{C}(X)$ bornée et uniformément continue sur Ω. Alors ϕ possède une unique extension bornée et continue sur $\overline{\Omega}$. On la notera encore ϕ.

Définition : Fixons un réel α tel que $0 < \alpha \leq 1$.

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}); H_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

On le munit de la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} + H_\alpha$$

Notation : On notera aussi s'il n'y a pas risque de confusion $\mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$ pour $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Proposition : $\left(\mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega}), \|.\|_{\mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega})}\right)$ est un espace de Banach.

Proposition : Si Ω est borné, on a :

$$\mathcal{C}^1_b(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}^{0+1}(\overline{\Omega}) = \mathrm{Lip}(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$$

Grosso modo, entre les fonctions Lipschitziennes et les fonctions continues, il y a les espaces de Hölder.

Définition : Par récurrence, on définit les $\mathcal{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ par :

$$\mathcal{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}); D^i u \in \mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega}); \forall i \text{ tel que } |i| = k \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|i|=k} H_\alpha(D^i u)$$

Proposition : $(\mathcal{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega}), \|.\|_{\mathcal{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega})})$ est un espace de Banach.

Notation : On écrira $\|u\|_{k+\alpha}$ pour $\|u\|_{\mathcal{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega})}$

Un outil utile : le théorème d'Arzela-Ascoli.

Dans la suite (X, d) désigne un espace métrique compact et $H \subset \mathcal{C}(X)$. En particulier, X est séparable et précompact.

Définition :

1. $H \subset \mathcal{C}(X)$ est dite équicontinue en $x_0 \in X$ si :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in X \; d(x_0, x) < \eta \Rightarrow \forall h \in H \; |h(x) - h(x_0)| < \epsilon$$

2. H est dite équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X.
3. H est dite uniformément équicontinue si :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x, y \in X \; d(x, y) < \eta \Rightarrow \forall h \in H \; |h(x) - h(y)| < \epsilon$$

Proposition : Une partie de $\mathcal{C}(X)$ est équicontinue si et seulement si elle est uniformément équicontinue.

Exemples :

1. Toute partie finie de $\mathcal{C}(X)$ est équicontinue.
2. Toute partie d'une partie équicontinue est équicontinue.
3. Toute union finie de parties équicontinues est équicontinue.

4. Une suite uniformément convergent de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ forme une partie équicontinue de $\mathcal{C}(X)$.
5. Si $C > 0$, alors l'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{K}$, de rapport C, est équicontinu.

Proposition : Soient (f_n) une suite équicontinue de $\mathcal{C}(X)$ et D une partie dense de X. Si $\forall x \in D$, la suite $(f_n(x))$ converge, alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$.

Théorème d'Arzela-Ascoli : Une partie de $\mathcal{C}(X)$ est relativement compacte (i.e d'adhérence compacte) dans $\mathcal{C}(X)$ si et seulement si :
— Elle est bornée
— Elle est équicontinue

Remarque : Soit $H \subset \mathcal{C}(X)$ une partie équicontinue. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. H est bornée.
2. Il existe $D \subset X$ dense telle que $\forall x \in D$, $\{f(x)\}_{f\in H}$ est une partie bornée de $\mathbb{K}$.

9.2.2 Estimations dans les espaces de Hölder

Proposition : Ω est supposé borné.

1. Si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, alors $\mathcal{C}^{0+\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$ i.e $\exists C > 0\ \forall u \in \mathcal{C}^{0+\beta}(\overline{\Omega})\ \|u\|_\alpha \leq C\|u\|_\beta$.
2. Si $0 < \alpha < \beta \leq 1$, alors l'injection précédente est compacte, i.e de toute suite bornée de $\mathcal{C}^{0+\beta}(\overline{\Omega})$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Théorème (d'injections) : Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $0 < \alpha < \beta \leq 1$.

1. $\mathcal{C}^{k+\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k}(\overline{\Omega})$, avec injection compacte si Ω borné.
2. $\mathcal{C}^{k+\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$, avec injection compacte si Ω borné.
   Si Ω est convexe, on a aussi :
3. $\mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$, avec injection compacte si Ω borné.

9.3 Espaces de Sobolev

9.3.1 Définitions et propriétés utiles

On rappelle de manière succinte des résultats sur les espaces de Sobolev que nous pouvons trouver dans Adams[1], Kavian[1], Hirsch-Lacombe[1] ou encore Zuily[1].

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq i \leq N$.

Définition : Une fonction $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ a une **i-ème dérivée faible** dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ s'il existe une fonction $f_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ on ait :

$$\int_\Omega u\partial_i\phi = -\int_\Omega f_i\phi$$

Avec f_i donnée par la relation ci-dessus, on pose $\partial_i u := \dfrac{\partial u}{\partial x_i} := f_i$.

Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$ et $\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\ldots\partial_N^{\alpha_N} u$.

Définition : Pour $1 \leq p \leq \infty$, on pose

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}$$

avec

$$\|u\|_p := \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}$$

Proposition :

1. $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach
2. Si $0 \leq m \leq n$, l'injection $W^{n,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ est continue.
3. En posant $\|D^m u\|_p := \left(\sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}$, on obtient une semi-norme sur $W^{m,p}(\Omega)$,et lorsque Ω est suffisamment régulier, $u \mapsto \|u\|_p + \|D^m u\|_p$ définit une norme équivalente à $\|.\|_{m,p}$.

Remarque : on note couramment $H^m(\Omega)$ l'espace $W^{m,2}(\Omega)$, l'espace des énergies, que l'on peut également définir pour des exposants m non entiers à l'aide de la transformée de Fourier.

Notations : Pour une fonction u quelconque, on note $u^+ = \max(u, 0)$ et $u^- = \max(-u, 0)$, de sorte que $u = u^+ - u^-$ et $|u| = u^+ + u^-$.

Proposition : Soient p et p' des exposants conjugués i.e tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors :

1. $W^{-m,p'} = (W_0^{m,p})'$
2. $H^{-m} = (H_0^m)'$

Proposition :

1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega),\ p < \infty$. Si le support de u est compact dans Ω, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ et $u_{|\partial\Omega} = 0$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
3. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\tilde{u} = \begin{cases} u \text{ sur } \Omega \\ 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \end{cases}$. Alors $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition (Composition) : Soit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $F(0) = 0$ et $\sup_{\mathbb{R}} |F'| < \infty \quad 1 \leq p \leq \infty$.

1. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla F(u) = F'(u) \nabla u$ pp.
2. Si $p < \infty$, alors $u \mapsto F(u)$ continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
3. Si $p < \infty$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $F(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème :

1. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors si $u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$.
2. On a $\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u \text{ si } u > 0 \\ 0 \text{ si } u \leq 0 \end{cases}$. Si $p < \infty$, alors $u \mapsto u^+$ est continue.
3. Si $p < \infty$ et si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $u^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarques : On a des résultats analogues pour u^- et $|u|$:

1. $\nabla u^- = \begin{cases} -\nabla u \text{ si } u < 0 \\ 0 \text{ si } u \leq 0 \end{cases}$.
2. $\nabla |u| = \begin{cases} -\nabla u \text{ si } u < 0 \\ 0 \text{ si } u \leq 0 \\ \nabla u \text{ si } u > 0 \end{cases}$.

   En particulier, $|\nabla |u|| = |\nabla u|$.

Corollaire : Soient $1 \leq p < \infty$, $v \in W_0^{1,p}, u \in W^{1,p}$. Si $|u| \leq |v|$, alors $u \in W_0^{1,p}$.

Corollaire : Soient $1 \leq p < \infty$, $M \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $\nabla M \in L^p(\Omega)$, $M^- \in L^p(\Omega)$.

1. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $(u-M)^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla(u-M)^+ = \begin{cases} \nabla u - \nabla M \text{ si } u > M \\ 0 \text{ si } u \leq M \end{cases}$
2. Si $p < \infty$, alors $\begin{cases} (u-M)^+ \text{ continue} \\ \text{Si } M^- \in W_0^{1,p} \text{ et si } u \in W_0^{1,p} \text{ alors } (u-M)^+ \in W_0^{1,p} \end{cases}$

Remarque : On peut appliquer ce résultat avec M constante positive ou nulle.

9.3.2 Estimations dans les espaces de Sobolev

Théorème (d'injection de Sobolev) : Soit $m \geq 1$ un entier et $1 \leq p < \infty$.

1. Si $mp < N$, on pose $p^{*m} := \dfrac{pN}{N - mp}$. Alors on a une injection continue de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p^{*m}}(\mathbb{R}^N)$: il existe une constante $C(m,p,N) > 0$ telle que $\|u\|_{p^{*m}} \leq C(m,p,N)\|D^m u\|_p$.
2. Si $mp = N$, pour tout $q \geq p$ il existe une constante $C(m,q,N) > 0$ telle que pour tout $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ on ait $\|u\|_q \leq C(m,q,N)\|u\|_{m,p}$.
3. Si $mp > N$, en posant $\alpha := 1 - \dfrac{N}{mp}$, on a $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ et il existe une constante $C(m,p,N)$ telle que pour tout $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ on ait l'inégalité de Sobolev-Morrey :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \ |u(x) - u(y)| \leq C(m,p,N)\|u\|_{m,p}|x-y|^\alpha$$
4. Si Ω est un ouvert de classe $\mathcal{C}^m$ à frontière bornée, les propriétés 2 et 3 sont vraies en remplaçant $\mathbb{R}^N$ par Ω et la constante C par une constante $C(m,p,\Omega)$, alors que si $mp < N$, il existe une constante $C(m,p,\Omega)$ telle que :
$$\|u\|_{p^{*m}} \leq C(m,p,\Omega)\|u\|_{m,p,\Omega}$$

Les dernières inégalités entraînent l'existence d'injections continues des espaces de Soboloev $W^{m,p}(\Omega)$ dans des espaces $L^q(\Omega)$ ou des espaces de Hölder $\mathcal{C}^{0,\alpha}$.

Théorème (Inégalités de Gagliardo-Nirenberg) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq N$ et $1 \leq r \leq \infty$. Il existe une constante $C(p,\theta,N)$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ on ait :
$$\|u\|_q \leq C\|u\|_r^{1-\theta}\|\nabla u\|_p^\theta$$
où $0 \leq \theta \leq 1$, avec $\theta > 0$ si $p = N \geq 2$, et :
$$\frac{1}{q} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1-\theta}{r}$$
On rappelle que $W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Théorème (de Rellich-Kondrachov) : Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$.

1. Si $p < N$, alors pour tout $q \geq 1$ tel que $q < p^* := \dfrac{pN}{N-p}$, l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.
2. Si $p = N$, alors pour tout $q < \infty$, l'injection de $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.
3. Si $p > N$ et $0 < \alpha < 1 - \dfrac{p}{N}$, alors l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ est compacte.
4. Lorsque Ω est un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, les résultats ci-dessus sont vrais en remplaçant $W_0^{1,p}(\Omega)$ par $W^{1,p}(\Omega)$
5. Lorsque $N = 1$, l'injection de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est continue et non compacte, mais toute suite bornée $(u_n)_n$ contient une sous-suite $(u_{n_j})_j$ telle que pour tout $x \in \Omega$, la suite $(u_{n_j}(x))_j$ est convergente.

Théorème (Inégalité de Poincaré) : On suppose que Ω est un ouvert borné au moins dans une direction. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p$$