Yannick Le Bastard
sous la direction de Christian Le Merdy

DIAGONALES DANS UNE ALGEBRE UNITALE ET PRODUIT DE HAAGERUP

8 juillet 2008

Table des matières

Ce mémoire a été réalisé par le biais du centre de télé-enseignement universitaire de Besançon.

Je tiens à remercier Christian Le Merdy pour sa disponibilité, ses réponses rapides et ses remarques toujours fructueuses qui m'ont guidé dans mes démarches. Ce mémoire aura aussi été l'occasion de découvrir ce que peut représenter un travail de recherche.

Je remercie également Emilie qui plus d'une fois a dû faire preuve de patience et de compréhension pendant l'année, notamment lorsque je me couchais le soir avec le produit tensoriel d'Haagerup en tête !

INTRODUCTION :

Le présent mémoire a pour but d'étudier la notion de diagonale dans une algèbre unitale ainsi que quelques propriétés particulières du produit tensoriel de Haagerup. Ces deux notions d'abord définies séparément, seront confrontées dans la dernière partie de ce travail.

La première partie de ce mémoire est essentiellement algébrique. On établit quelques résultats sur les diagonales dans une algèbre unitale, donnant des conditions suffisantes d'existence comme des contre-exemples : toutes les algèbres unitales de dimension finie n'ont pas nécessairement de diagonales. Nous obtenons en résultat principal la description de toutes les algèbres unitales admettant (au moins) une diagonale.

La seconde partie de ce travail repose sur la notion de produit tensoriel de Haagerup. Après avoir défini une norme sur le produit tensoriel de Haagerup de deux espaces d'opérateurs, on étudie quelques unes de ses propriétés et on définit la notion de h-diagonale. On obtient alors l'analogue d'un des théorèmes obtenus dans la première partie (cette fois-ci, algèbre et topologie étant intimement mêlés).

Chapitre 1

Produits tensoriels

Dans ce chapitre, nous abordons les bases nécessaires à l' étude des diagonales dans une algèbre unitale A. Nous définissons d'abord la notion purement algébrique de produit tensoriel de deux espaces vectoriels et nous étudions brièvement ses principales propriétés. La propriété universelle à la base de sa construction est le pivot de nombreux résultats obtenus ultérieurement. Nous définissons également le produit tensoriel projectif, que nous mettrons en confrontation avec le produit de Haagerup, lequel, comme nous le verrons au cours de cette étude, possède des propriétés particulières.

1.1 Produit tensoriel d'espaces vectoriels

Théorème-définition 1-1-1 : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Il existe un espace vectoriel X et une application bilinéaire $\Theta : E \times F \to X$ (i) telle que pour toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$, il existe une unique application linéaire $f : X \to G$ telle que $f \circ \Theta = B$ (ii). Le couple (X, Θ) vérifiant la propriété universelle précédente : (i) et (ii) est unique à un isomorphisme près, dans le sens où si (X, Θ) et (X', Θ') vérifient (i) et (ii), alors il existe un isomorphisme α de X sur X' tel que $\alpha \circ \Theta = \Theta'$.
On appelle **produit tensoriel** de E et F tout couple (X, Θ) vérifiant (i) et (ii). On note $X = E \otimes F$ et $\Theta = \otimes$.

remarque 1-1-2 : Ainsi $X = E \otimes F$ est défini à isomorphisme près. Selon le contexte, on en choisira une réalisation commode.

Proposition 1-1-3 : Si E et F sont deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de bases respectives $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_j)_{j \in J}$, alors $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $E \otimes F$

Proposition 1-1-4 : $E \otimes F$ possède les propriétés suivantes :
(1) $\{ x \otimes y \, ; x \in E \, ; y \in F \}$ engendre $E \otimes F$.
(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $(x, y) \in E \times F$, on a $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$
(3) Tout élément de $E \otimes F$ est de la forme $\sigma = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$, où x_k et y_k appartiennent respectivement à E et F.

Définition 1-1-5 : Les éléments de $E \otimes F$ s'appellent des <u>tenseurs</u>. Un élément de la forme $a \otimes b$ s'appelle un <u>tenseur élémentaire</u>.

remarque 1-1-6 : Si $\dim E = n$ et $\dim F = p$, alors $\dim (E \otimes F) = np$
Pour la démonstration des résultats précédents, on pourra consulter [ABM,77, p135-142]

Une réalisation commode du produit tensoriel de deux espaces vectoriels est donnée par la construction suivante :

Proposition 1-1-7 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On note $E^{\dagger}$ le dual algébrique de E. Alors $E \otimes F$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{L}(E^{\dagger}, F)$, l'espace des applications linéaires de $E^{\dagger}$ vers F, via l'injection $\Psi : \begin{cases} E \otimes F \longrightarrow \mathcal{L}(E^{\dagger}, F) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \longmapsto u \end{cases}$ où pour tout forme linéaire φ sur E, on a $u(\varphi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) y_k$.

Corollaire 1-1-8 : (1) Soit $\sigma = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \in E \otimes F$. Alors $\sigma = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) y_k = 0$ pour tout $\varphi \in E^{\dagger}$
(2) De même $\sigma = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\psi(y_k) = 0$ pour tout $\varphi \in E^{\dagger}$ et $\psi \in F^{\dagger}$

remarque 1-1-9 : Le résultat précédent a une formulation plus précise si E et F sont munis d'une structure topologique. Plus exactement :
Soient E et F deux espaces de Banach . On note E^* le dual **topologique** de E. Alors $E \otimes F$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{B}(E^*, F)$, l'espace des applications linéaires **continues** de E^* vers F, via l'injection $\Psi : \begin{cases} E \otimes F \longrightarrow \mathcal{B}(E^*, F) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \longmapsto u \end{cases}$ où pour tout $\varphi \in E^*$, on a $u(\varphi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) y_k$.
En fait, $Im(\Psi)$ est constitué du sous-espace $RF_*(E^*, F)$ des applications linéaires de rang fini qui sont continues de E^* muni de la topologie préfaible sur F muni de la topologie de la norme. [LM,07]

La propriété universelle du produit tensoriel permet d'obtenir des identifications très utiles en pratique. En voici trois :

Proposition 1-1-10 : (1) Soient E_1 et F_1 des sous-espaces de E et F. Alors on peut réaliser $E_1 \otimes F_1$ comme un sous-espace de $E \otimes F$.
(2) Si $E = E_1 \oplus E_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$, alors :

$$E \otimes F = (E_1 \otimes F_1) \oplus (E_1 \otimes F_2) \oplus (E_2 \otimes F_1) \oplus (E_2 \otimes F_2)$$

résultat qui se généralise aisément par récurrence.
(3) Soient $S \in \mathcal{B}(E, E')$ et $T \in \mathcal{B}(F, F')$. D'après la propriété universelle du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire $S \otimes T : E \otimes F \longrightarrow E' \otimes F'$ telle que pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, $(S \otimes T)(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$.

Lemme 1-1-11 : (1) Soit $u \in X \otimes Y$. Posons $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. Alors on peut écrire u sous la forme

$u = \sum_{i=1}^{m} x'_i \otimes y'_i$, où les familles $\{x'_i\}$ et $\{y'_i\}$ sont libres.

(2) Si de plus, $u = \sum_{j=1}^{p} \tilde{x}_j \otimes \tilde{y}_j$ et que les familles $\{\tilde{x}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant p\}$ et $\{\tilde{y}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant p\}$ sont libres alors :

$$< \{\tilde{x}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant p\} >=< \{x'_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\} >$$

et

$$< \{\tilde{y}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant p\} >=< \{y'_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\} >$$

Démonstration : (1) Soit $E =< \{x_1, \cdots, x_n\} >$ et $F =< \{y_1, \cdots, y_n\} >$. Quitte à réordonner les y_i, on peut supposer que pour un $k \leqslant n$ $\{y_1, \cdots, y_k\}$ est une base de F. Après avoir exprimé $y_{k+1}, \cdots, y_n$ comme combinaison linéaire de $y_1, \cdots, y_k$, on peut réécrire u sous la forme $u = \sum_{i=1}^{k} x'_i \otimes y_i$, avec $x'_i \in E$. Quitte à réindexer, on peut supposer que $\{x'_1, \cdots, x'_m\}$ est une base de $< \{x'_1, \cdots, x'_k\} >$. u se réécrit alors $u = \sum_{i=1}^{m} x'_i \otimes y'_i$. On vérifie aisément que les familles $\{x'_1, \cdots, x'_m\}$ et $\{y'_1, \cdots, y'_m\}$ sont libres.

(2) La famille $\{x'_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$ étant libre, il existe m formes linéaires $f_i : X \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f_i(x'_j) = \delta_{ij},\ i, j = 1 \cdots m$. Soit $f_i \otimes 1 : X \otimes Y \longrightarrow Y$. On a $(f_i \otimes 1)(u) = \sum_{k=1}^{p} f_i(\tilde{x}_k)\tilde{y}_k$. Il s'ensuit que $y'_i \in< \{\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_p\} >$. Les autres cas se traitent de la même manière.

Définition 1-1-12 : De ce qui précède, on en déduit $m = p$. m s'appelle le **rang** de u.

1.2 Produit tensoriel projectif

Proposition-Définition 1-2-1 : Soient E et F deux espaces de Banach et $\sigma \in E \otimes F$. Il existe des familles finies (x_k) de E et (y_k) de F telles que $\sigma = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$.

On pose $||\sigma||_\wedge = \inf \left\{ \sum_k ||x_k|| \cdot ||y_k|| \ ;\ \sigma = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k,\ x_k \in E,\ y_k \in F \right\}$. Alors $|| \cdot ||_\wedge$ est une norme sur $E \otimes F$, appelée *norme tensorielle projective.*

Démonstration : cf exercice 5 du chapitre 4 [LM,07]

Définition 1-2-2 : Soit $E\widehat{\otimes}F$ le complété de $E \otimes F$ pour $|| \cdot ||_\wedge$. C'est par définition le produit tensoriel projectif de E et F.

Proposition 1-2-3 : $\forall (x, y) \in E \times F,\ ||x \otimes y||_\wedge = ||x||_\wedge \cdot ||y||_\wedge$

Proposition 1-2-4 : Soient $S : E \longrightarrow E'$ et $T : F \longrightarrow F'$ des opérateurs. Alors il existe un unique opérateur $S\widehat{\otimes}T : E\widehat{\otimes}F \longrightarrow E'\widehat{\otimes}F'$ tel que $(S\widehat{\otimes}T)(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$. De plus, $||S\widehat{\otimes}T|| = ||S|| \cdot ||T||$.

remarque 1-2-5 : La norme du produit tensoriel projectif "passe très mal" aux sous-espaces. Dit autrement, si W est un sous-espace de l'espace de Banach E, de sorte que $W \otimes F$ est un sous-espace de $E \otimes F$, alors la norme induite sur $W \otimes F$ par la norme $|| \cdot ||_{\wedge}$, n'est pas en général, la norme projective sur $W \otimes F$. Pour plus, de détails, cf [R,02, p18].

Ces limitations peuvent être contournées en introduisant une nouvelle norme sur $E \otimes F$, plus faible que la *norme tensorielle projective* et jouissant de propriétés spéciales, inhérentes à elle-même. Nous y reviendrons en détail dans le chapitre 4.

1.3 Produit de Haagerup

Proposition-Définition 1-3-1 : Soient E et F deux **espaces d'opérateurs** et $\sigma \in E \otimes F$. Il existe des familles finies (x_k) de E et (y_k) de F telles que $\sigma = \sum_k x_k \otimes y_k$.

On pose $||\sigma||_h = \inf \left\{ \left\| \sum_k x_k x_k^* \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_k y_k^* y_k \right\|^{\frac{1}{2}} ; \ \sigma = \sum_k x_k \otimes y_k, \ x_k \in E, \ y_k \in F \right\}$. Alors $|| \cdot ||_h$ est une norme sur $E \otimes F$, appelée *norme tensorielle de Haagerup.*

Lemme 1-3-1-1 : Soient a, b deux réels positifs. $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \inf \{\lambda a + \lambda^{-1} b, \ \lambda > 0\}$

Demonstration : Si $a = 0$ ou $b = 0$, le résultat est clair. Si $a, b > 0$, $\lambda a + \lambda^{-1} b - 2\sqrt{ab} = \lambda^{-1}(\lambda\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, ceci pour tout $\lambda > 0$. D'où $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2} \inf \{\lambda a + \lambda^{-1} b, \ \lambda > 0\}$. Choisissant $\lambda = \sqrt{\frac{b}{a}}$, on obtient l'égalité voulue.

Démonstration (du 1-3-1) :

Il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $u \in E \otimes F$ on a $\|\lambda u\|_h = |\lambda| \|u\|_h$

Soient u et v deux éléments de $E \otimes F$. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Par définition de $\| \cdot \|_h$, il existe des représentations de u et de v : $u = \sum_j x_j \otimes y_j$ et $v = \sum_k z_k \otimes w_k$ telles que :

$$\left\| \sum_j x_j x_j^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_j y_j^* y_j \right\|^{\frac{1}{2}} - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \|u\|_h \leqslant \left\| \sum_j x_j x_j^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_j y_j^* y_j \right\|^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

et

$$\left\| \sum_k z_k z_k^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_k w_k^* w_k \right\|^{\frac{1}{2}} - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \|v\|_h \leqslant \left\| \sum_k z_k z_k^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_k w_k^* w_k \right\|^{\frac{1}{2}} \quad (1')$$

D'après le lemme 1-3-1-1, il existe $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tels que :

$$\frac{1}{2}\left\{\lambda \left\| \sum_j x_j x_j^* \right\| + \lambda^{-1} \left\| \sum_j y_j^* y_j \right\|\right\} - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \left\| \sum_j x_j x_j^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_j y_j^* y_j \right\|^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

et

$$\frac{1}{2}\left\{\mu \left\| \sum_k z_k z_k^* \right\| + \mu^{-1} \left\| \sum_k w_k^* w_k \right\|\right\} - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \left\| \sum_k z_k z_k^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_k w_k^* w_k \right\|^{\frac{1}{2}} \quad (2')$$

Combinant (1) et (2) on obtient :

$$\frac{1}{2}\Big\{\lambda\Big\|\sum_j x_j x_j^*\Big\| + \lambda^{-1}\Big\|\sum_j y_j^* y_j\Big\|\Big\} \leqslant \|u\|_h + \epsilon \quad (3)$$

De même on a avec (1') et (2') :

$$\frac{1}{2}\Big\{\mu\Big\|\sum_k z_k z_k^*\Big\| + \mu^{-1}\Big\|\sum_k w_k^* w_k\Big\|\Big\} \leqslant \|v\|_h + \epsilon \quad (3')$$

Remarquons à présent que

$$u + v = \sum_j (\sqrt{\lambda} x_j) \otimes (\frac{1}{\sqrt{\lambda}} y_j) + \sum_k (\sqrt{\mu} z_k) \otimes (\frac{1}{\sqrt{\mu}} w_k)$$

D'où

$$\|u+v\|_h \leqslant \Big\|\lambda \sum_j x_j x_j^* + \mu \sum_k z_k z_k^*\Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\|\lambda^{-1} \sum_j y_j^* y_j + \mu^{-1} \sum_k w_k^* w_k\Big\|^{\frac{1}{2}}$$

Or pour $a, b \geqslant 0$ $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$, d'où :

$$\|u+v\|_h \leqslant \frac{1}{2}\Big\{\Big\|\lambda \sum_j x_j x_j^* + \mu \sum_k z_k z_k^*\Big\| + \Big\|\lambda^{-1} \sum_j y_j^* y_j + \mu^{-1} \sum_k w_k^* w_k\Big\|\Big\}$$

D'où

$$\|u+v\|_h \leqslant \frac{1}{2}\Big\{\lambda\Big\|\sum_j x_j x_j^*\Big\| + \lambda^{-1}\Big\|\sum_j y_j^* y_j\Big\|\Big\} + \frac{1}{2}\Big\{\mu\Big\|\sum_k z_k z_k^*\Big\| + \mu^{-1}\Big\|\sum_k w_k^* w_k\Big\|\Big\}$$

Soit, utilisant (3) et (3') :

$$\|u+v\|_h \leqslant \|u\|_h + \|v\|_h + 2\epsilon$$

ϵ étant arbitraire, l'inégalité triangulaire est démontrée.

Soit $u \in E \otimes F$ tel que $\|u\|_h = 0$. u s'écrit $u = \sum_k x_k \otimes y_k$ (somme finie). Soient $\phi \in E^*$ et $\psi \in F^*$. Par Cauchy-Schwarz,

$$\Big|\sum_k \phi(x_k)\psi(y_k)\Big| \leqslant \Big(\sum_k |\phi(x_k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_k |\psi(y_k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Mais ϕ est une forme linéaire continue, donc est complètement bornée, avec $\|\phi\|_{cb} = \|\phi\|$. Idem pour ψ. Il s'ensuit que :

$$\Big(\sum_k |\phi(x_k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\phi\|\Big\|\sum_k x_k x_k^*\Big\|^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \Big(\sum_k |\psi(y_k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\psi\|\Big\|\sum_k y_k^* y_k\Big\|^{\frac{1}{2}}$$

Par conséquent,

$$\Big|\sum_k \phi(x_k)\psi(y_k)\Big| \leqslant \|\phi\|\|\psi\|\Big\|\sum_k x_k x_k^*\Big\|^{\frac{1}{2}}\Big\|\sum_k y_k^* y_k\Big\|^{\frac{1}{2}}$$

Passant à l'inf sur l'ensemble des représentations de u, et se servant du fait que $\|u\|_h = 0$, on en déduit que $\sum_k \phi(x_k)\psi(y_k) = 0$ pour tous $\phi \in E^*$ et $\psi \in F^*$. D'où $u = 0$ d'après le corollaire 1-1-8. Ce qui achève la preuve. $\square$

Définition 1-3-2 : Soit $E \otimes_h F$ le complété de $E \otimes F$ pour la norme $|| \cdot ||_h$. C'est par définition le produit de Haagerup de E et F.

Notation : Si l'on note $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$, on a :

$$||\sigma||_h = \inf \left\{ ||x||^{\frac{1}{2}} \cdot ||^t y||^{\frac{1}{2}} \ ; \ \sigma = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k, \ x_k \in E, \ y_k \in F, \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Identifiant x un vecteur ligne à une matrice X de $M_{1,n}(E)$ et ${}^t y$ à une matrice Y de $M_{n,1}(F)$ ce qui précède se réécrit :

$$||\sigma||_h = \inf \left\{ ||X||^{\frac{1}{2}} \cdot ||Y||^{\frac{1}{2}} \ ; \ \sigma = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k, \ x_k \in E, \ y_k \in F, \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

les x_k et y_k désignant les composantes respectives de X et Y.
On écrira $\sigma = X \odot Y$ pour plus de lisibilité.

remarque 1-3-4 : (1) Contrairement au produit tensoriel projectif, si $E_1 \subset E$ et $F_1 \subset F$, la norme d'un élément dans $E_1 \otimes F_1$ coïncide avec sa norme induite dans $E \otimes F$. Supposons que E et F sont des espaces d'opérateurs sur le même espace de Hilbert H, on peut regarder $E \otimes_h F$ comme un sous-espace de $\mathcal{B}(H) \otimes_h \mathcal{B}(H)$. [S, p165] Cette injection est une isométrie [ASM, 93, p113]. On dit que $|| \cdot ||_h$ est injective.
(2) on peut remarquer que $\mathcal{B}(H) \otimes_h \mathcal{B}(H)$ est une algèbre de Banach pour l'une quelconque des multiplications suivantes : $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd, \ ac \otimes db, \ ca \otimes bd, \ ca \otimes db.$

Proposition 1-3-5 : La norme du produit tensoriel projectif est plus forte que celle du produit de Haagerup.

Chapitre 2

Diagonales dans une algèbre unitale

Ici commence l'étude plus précise de la notion d'algèbre unitale et de diagonale. Le cadre bien que purement algébrique, est néanmoins suffisant pour obtenir des résultats importants, liés à la notion de dérivation. Le lien étroit entre diagonale dans une algèbre unitale et le fait qu'elle soit de dimension finie sera abordé au chapitre suivant. Nous définissons ici la notion de diagonale et en donnons quelques exemples. Il apparaît que toutes les algèbres unitales, même de dimension finie, n'ont pas de diagonale. Le fait qu'une algèbre unitale admette une diagonale est donc une propriété particulière qui, nous le verrons, caractérise les $\mathcal{C}^{\star}-$algèbres de dimension finie.

2.1 Diagonales

Définition 2-1 : Soit A une algèbre unitale (on notera 1 l'unité de A). On note p : $A \otimes A \longrightarrow A$ l'unique application linéaire induite par la multiplication, i.e. $p\Big(\sum_k a_k \otimes b_k\Big) = \sum_k a_k b_k$, pour tout $\sum_k a_k \otimes b_k \in A \otimes A$ (la somme étant finie). Etant donné $u = \sum_k a_k \otimes b_k \in A \otimes A$ et $c \in A$, on note $cu = \sum_k (ca_k) \otimes b_k$ et $uc = \sum_k a_k \otimes (b_k c)$. Par définition, une **diagonale** sur A est un élément $u \in A \otimes A$ tel que $p(u) = 1$ et $cu = uc$ pour tout $c \in A$.

2.2 Isomorphismes et diagonales

Proposition 2-2 : Soient A et B deux algèbres unitales isomorphes. Si A admet une diagonale, alors B en admet une également.

Démonstration : Soit Φ un isomorphisme de A sur B. C'est un isomorphisme d'algèbres unitales, donc $\forall (a,b) \in A \times A,\ \Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ et $\Phi(1) = 1$. Soit $u = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k$ une diagonale sur A, $(a_k,\ b_k \in A)$. Posons $v = \sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k) \otimes \Phi(b_k) \in B \otimes B$. Notant toujours p l'application linéaire induite par la multiplication, $p(v) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k)\Phi(b_k) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k b_k) = \Phi\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big) = \Phi(1) = 1.$

Soit $d \in B$. Il existe (un unique) $c \in A$ tel que $d = \Phi(c)$. Mais alors $dv = \sum_{k=1}^{n} d\Phi(a_k) \otimes \Phi(b_k) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(c)\Phi(a_k) \otimes \Phi(b_k) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(ca_k) \otimes \Phi(b_k)$.
Utilisant les notations de la remarque 1-2-4, on a

$$dv = \sum_{k=1}^{n} (\Phi \otimes \Phi)(ca_k \otimes b_k)$$

d'où $dv = (\Phi \otimes \Phi)\Big(\sum_{k=1}^{n} ca_k \otimes b_k\Big) = (\Phi \otimes \Phi)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k c\Big)$ (comme u diagonale), soit

$$dv = \sum_{k=1}^{n} (\Phi \otimes \Phi)(a_k \otimes b_k c) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k) \otimes \Phi(b_k c) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k) \otimes \Phi(b_k)\Phi(c) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k) \otimes \Phi(b_k) d = vd$$

Donc v est une diagonale sur B.

2.3 Exemples de diagonales

2.3.1 Diagonales sur l_N^∞

On rappelle que l_N^∞ est une $\mathcal{C}^\star-$ algèbre, pour le produit et l'involution définis respectivement par : $(a_1, \cdots, a_N) \cdot (b_1, \cdots, b_N) = (a_1 b_1, \cdots, a_N b_N)$ et $(a_1, \cdots, a_N)^* = (\overline{a_1}, \cdots, \overline{a_N})$. La norme est celle du sup : $||(a_1, \cdots, a_N)||_\infty = \max \{|a_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$. On note $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$ la base canonique de l_N^∞, où e_i désigne l'élément $(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, le 1 étant situé en i^{eme} place. l_N^∞ est unitale, d'unité $\sum_{i=1}^{N} e_i$ (que l'on notera 1). On vérifie facilement que $p(e_i \otimes e_j) = \delta_{ij} e_i (= \delta_{ij} e_j)$

Théorème 2-3-1 : l_N^∞ a une unique diagonale. C'est $u = \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes e_i$.

Démonstration : D'après la remarque ci-dessus, on a directement que $p(u) = 1$. De plus,

$$\forall a \in l_N^\infty,\ au = \sum_{i=1}^{N} (ae_i) \otimes e_i = \sum_{i=1}^{N} a_i (e_i \otimes e_i) = \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes (e_i a) = ua$$

Donc u est une diagonale sur l_N^∞. Vérifions que c'est la seule.

Soit u une diagonale de l_N^∞. Comme $\{e_i \otimes e_j\}$ est une base de $l_N^\infty \otimes l_N^\infty$, on peut écrire

$$u = \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{ij} (e_i \otimes e_j)$$

Mais alors $p(u) = \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{ij} \delta_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ii} e_i$. Or u est une diagonale, donc $p(u) = 1$. Comme $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est une base de l_N^∞, alors pour tout $i = 1, \cdots N$ $\lambda_{ii} = 1$ (1)

Toujours par le fait que u soit une diagonale de l_N^∞, on a :

$$\forall\ l = 1, \cdots, N \quad e_l u = u e_l$$

c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{ij}(e_l e_i) \otimes e_j = \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{ij} e_i \otimes (e_j e_l)$.

soit

$$\forall\ l = 1, \cdots, N \quad \sum_{j=1}^{N} \lambda_{lj} e_l \otimes e_j = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{il} e_i \otimes e_l$$

Comme $\{e_i \otimes e_j\}_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ est une base de $l_N^\infty \otimes l_N^\infty$, on en déduit que :

$$\forall j \neq l\ \lambda_{lj} = 0 \quad (2)$$

Combinant (1) et (2), on obtient que $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$. D'où

$$u = \sum_{i,j=1}^{N} \delta_{ij}(e_i \otimes e_j) = \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes e_i$$

Ce qui prouve le résultat annoncé. $\square$

2.3.2 Diagonales sur M_n

On rappelle que M_n est une algèbre unitale. Une base de M_n est constituée des matrices E_{ij} constituées de 0 sauf à l'intersection de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne où il y a un 1.

Théorème 2-3-2 : L'algèbre M_n des matrices complexes de taille $n \times n$ a pour diagonales les éléments de la forme $u = \displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n} b_{kj} E_{ij} \otimes E_{ki}$, où $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{jj} = 1$.

Démonstration : on utilisera constamment le résultat suivant : $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$
Soit u de la forme annoncée.

$$p(u) = \sum_{i,j,k} b_{kj} E_{ij} E_{ki} = \sum_{i,j,k} \delta_{jk} b_{kj} E_{ii} = \sum_{i,j} b_{jj} E_{ii} = \Big(\sum_j b_{jj}\Big)\Big(\sum_i E_{ii}\Big)$$

Sachant que $\displaystyle\sum_j b_{jj} = 1$ et $\displaystyle\sum_i E_{ii} = 1$ (l'unité de M_n : ici 1 désigne I_n), on a $p(u) = 1$.

$$\forall p, q = 1, \cdots, n \quad E_{pq} u = \sum_{i,j,k} b_{kj} (E_{pq} E_{ij}) \otimes E_{ki}$$

soit

$$E_{pq} u = \sum_{i,j,k} b_{kj} \delta_{qi} E_{pj} \otimes E_{ki} = \sum_{j,k} b_{kj} E_{pj} \otimes E_{kq}$$

De même :

$$u E_{pq} = \sum_{i,j,k} b_{kj} E_{ij} \otimes (E_{ki} E_{pq}) = \sum_{i,j,k} b_{kj} \delta_{ip} E_{ij} \otimes E_{kq} = \sum_{j,k} b_{kj} E_{pj} \otimes E_{kq}$$

Ainsi,

$$\text{pour tout } p,q = 1, \cdots, n \quad E_{pq}u = uE_{pq}.$$

$\{E_{pq}\}_{1 \leqslant p,q \leqslant n}$ formant une base de M_n, on en déduit que $\forall a \in M_n \; au = ua$. Donc u est une diagonale sur M_n.

Vérifions maintenant que si u est une diagonale sur M_n, alors u est de la forme

$$u = \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{kj} E_{ij} \otimes E_{ki} \quad \text{où} \quad \sum_{j=1}^{n} b_{jj} = 1$$

Soit u une diagonale de M_n. $\{E_{ij} \otimes E_{kl} \; ; \; 1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n\}$ est une base de $M_n \otimes M_n$. On peut donc écrire

$$u = \sum_{i,j,k,l} a_{ijkl} E_{ij} \otimes E_{kl} \quad (1)$$

$$p(u) = \sum_{i,j,k,l} a_{ijkl} E_{ij} E_{kl} = \sum_{i,j,k,l} a_{ijkl} \delta_{jk} E_{il} = \sum_{i,j,l} a_{ijjl} E_{il}$$

Or $p(u) = 1 = \sum_{i,l} \delta_{il} E_{il}$. Donc $\forall (i,l) \; \sum_{j} a_{ijjl} = \delta_{il}$. En particulier :

$$\forall i \; \sum_{j} a_{ijji} = 1 \quad (2)$$

Il est remarquable que la quantité $\sum_{j} a_{ijji}$ soit indépendante de i.

D'autre part, pour tout (p,q) on a $E_{pq}u = uE_{pq}$, soit :

$$\forall (p,q) \; \sum_{i,j,k,l} a_{ijkl} (E_{pq} E_{ij}) \otimes E_{kl} = \sum_{i,j,k,l} a_{ijkl} E_{ij} \otimes (E_{kl} E_{pq})$$

i.e

$$\forall (p,q) \quad \sum_{j,k,l} a_{qjkl} E_{pj} \otimes E_{kl} = \sum_{i,j,k} a_{ijkp} E_{ij} \otimes E_{kq} \quad (3)$$

Via l'injection $M_n \otimes M_n \hookrightarrow \mathcal{B}(M_n^*, M_n)$, l'égalité (3) devient :

$$\forall (p,q) \quad \forall \phi \in M_n^* \quad \sum_{j,k,l} a_{qjkl} \phi(E_{pj}) E_{kl} = \sum_{i,j,k} a_{ijkp} \phi(E_{ij}) E_{kq}$$

Choisissant $\phi = Tr$ (la trace), on obtient :

$$\sum_{j,k,l} a_{qjkl} \delta_{pj} E_{kl} = \sum_{i,j,k} a_{ijkp} \delta_{ij} E_{kq}$$

soit

$$\forall (p,q) \quad \sum_{k,l} a_{qpkl} E_{kl} = \sum_{i,k} a_{iikp} E_{kq} \quad (4)$$

$\{E_{kl}\ ;\ 1 \leqslant k, l \leqslant n\}$ formant une base de M_n , on a :

$$\forall (p,q) \ \text{ si } l \neq q \ a_{qpkl} = 0$$

D'après (1) on a donc $u = \sum_{i,j,k} a_{ijki} E_{ij} \otimes E_{ki}$
Utilisant (4), on a $\forall k \ \ \forall (p,q) \ \ a_{qpkq} = \sum_i a_{iikp}$
soit en changeant d'indice :

$$\forall i,j,k \ \ a_{ijki} = \sum_l a_{llkj} \ \ (5) \ \ \text{(quantité indépendante de i)}$$

Combinant (2) et (5), posons $b_{kj} = a_{ijki}$ pour n'importe quelle valeur de i.
D'après (2) on a $\sum_j b_{jj} = 1$. Finalement, u s'écrit :

$$u = \sum_{i,j,k} b_{kj} E_{ij} \otimes E_{ki}$$

D'où le résultat. □

2.4 Toutes les algèbres unitales n'ont pas de diagonales

Proposition 2-4 : T_2, la sous-algèbre de M_2 des matrices triangulaires supérieures à coefficients complexes, n'a pas de diagonale.

Démonstration : Supposons par l'absurde que T_2 admette une diagonale $u = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k$; $a_k,\ b_k \in T_2$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.
Soit $T_2' = \{A \in M_2\ ;\ \forall U \in T_2 \ \ AU = UA\}$ le commutant de T_2.
Il est clair que $1 \in T_2'$ donc $<\{1\}> \subset \ T_2'$.
Réciproquement, soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in T_2'$
$AE_{11} = E_{11}A$ entraine $\beta = \gamma = 0$.
$AE_{12} = E_{12}A$ entraine $\alpha = \delta$.
D'où finalement $A = \alpha 1 \ \in <\{1\}>$ et $T_2' = <\{1\}>$ (1)
Soit : $\Phi : \begin{cases} M_2 \longrightarrow M_2 \\ T \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k T b_k \end{cases}$ et pour $T \in M_2$ fixé $\Psi_T : \begin{cases} M_2 \times M_2 \longrightarrow M_2 \\ (a,b) \longmapsto aTb \end{cases}$
Φ est linéaire ; Ψ_T est bilinéaire, donc induit une unique application linéaire $\tilde{\Psi}_T : M_2 \otimes M_2 \longrightarrow M_2$ telle que $\forall (a,b) \in M_2 \times M_2 \ \ \tilde{\Psi}_T(a \otimes b) = aTb$.
Ainsi, par linéarité de $\tilde{\Psi}_T$ on a :

$$\tilde{\Psi}_T(u) = \Phi(T) \ \ \forall T \in M_2$$

Mais u est une diagonale sur T_2, donc pour tout $a \in T_2$ $au = ua$, d'où $\forall a \in T_2$ $\tilde{\Psi}_T(au) = \tilde{\Psi}_T(ua)$,

soit après un bref calcul $a\Phi(T) = \Phi(T)a$.
Ainsi, pour tout $T \in M_2$ $\Phi(T) \in T_2'$ (2)
Comme $a_k,\ b_k \in T_2$, on vérifie aisément par le calcul que $\forall k = 1, \cdots, n$ $a_k E_{11} b_k \in <\{E_{11}; E_{12}\}>$, d'où $\Phi(E_{11}) \in <\{E_{11}; E_{12}\}>$.
Mais par ce qui précède, $\Phi(E_{11}) \in <\{1\}>$ *et* $<\{E_{11}; E_{12}\}> \cap <\{1\}> = \{0\}$. D'où $\Phi(E_{11}) = 0$. De même $\Phi(E_{22}) = 0$
D'où $\Phi(E_{11} + E_{22}) = \Phi(1) = 0$.
Or comme u diagonale, $\Phi(1) = 1$. Contradiction.
Donc T_2 n'a pas de diagonale.

2.5 Diagonales et dérivations

Dans ce paragraphe, nous définissons la notion de dérivation et de dérivation intérieure, que nous mettons en lien avec celle de diagonale. Il apparaîtra que A possède une diagonale si et seulement si pour tout $A-$bimodule X, toutes les dérivations sont intérieures. On a ainsi une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une diagonale sur une algèbre unitale A.

Définition 2-5-1 : Soit X un $A-$bimodule. Une application $\delta : A \longrightarrow X$ est appelée une **dérivation** si pour tous $a, b \in A$ $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$

Proposition-Définition 2-5-2 : Etant donné $x \in X$, l'application $\delta : A \longrightarrow X$ définie par $\delta(a) = xa - ax$ est une dérivation. Les dérivations de cette forme sont dites **intérieures**.

Démonstration : Soient $a, b \in A$.

$$a\delta(b) = a(xb - bx) = axb - abx$$

$$\delta(a)b = (xa - ax)b = xab - axb$$

D'où

$$a\delta(b) + \delta(a)b = xab - abx = \delta(ab)$$

Proposition 2-5-3 : A possède une diagonale si et seulement si pour tout $A-$bimodule X, toutes les dérivations sont intérieures.

Démonstration : Supposons que A possède une diagonale $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$. Soit X un $A-$bimodule et $\delta : A \longrightarrow X$ une dérivation. Posons $x = \sum_{i=1}^{n} \delta(a_i) b_i$. Soit $\Psi : \begin{cases} A \times A \longrightarrow X \\ (a, b) \longmapsto \delta(a)b \end{cases}$
Ψ est bilinéaire, donc induit une unique application linéaire $\phi : A \otimes A \longrightarrow X$ telle que $\forall (a, b) \in A \otimes A$ $\phi(a \otimes b) = \delta(a)b$
Comme u est une diagonale, on a $\forall a \in A$:

$$\phi\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes (b_i a)\Big) = \phi\Big(\sum_{i=1}^{n} (aa_i) \otimes b_i\Big)$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(a_i)b_i a = \sum_{i=1}^{n} \delta(aa_i)b_i$$

Soit :

$$xa = \sum_{i=1}^{n} \delta(aa_i)b_i \quad (1)$$

Or

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(aa_i)b_i = \sum_{i=1}^{n} (a\delta(a_i)b_i + \delta(a)a_ib_i) = a\sum_{i=1}^{n} \delta(a_i)b_i + \delta(a)\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

Comme u est une diagonale, $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = 1$. D'où :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(aa_i)b_i = ax + \delta(a)$$

D'après (1) on a : $xa = ax + \delta(a)$, donc $\delta(a) = ax - xa$. Ainsi, toutes les dérivations sont intérieures.

Réciproquement, supposons que pour tout $A-$bimodule X, toutes les dérivations soient intérieures. Notant toujours p l'application linéaire induite par le produit sur A, posons $X = \text{Ker } p$. $X \subset A \otimes A$ est clairement un $A-$bimodule. Comme $p(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = a - a = 0$, on peut définir $\delta : A \longrightarrow X$, $a \longmapsto a \otimes 1 - 1 \otimes a$. Comme X est un $A-$bimodule, on vérifie aisément que $\forall (a, b) \in A \times A$ $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$. Donc δ est une dérivation.
Par hypothèse δ est intérieure. Soit w l'élément de X tel que $\forall a \in A$ $\delta(a) = aw - wa$. Posons $u = 1 \otimes 1 - w$.

$$au = a \otimes 1 - aw$$

$$ua = 1 \otimes a - wa$$

D'où

$$au - ua = a \otimes 1 - 1 \otimes a - (aw - wa)$$

Soit

$$au - ua = \delta(a) - \delta(a) = 0 \ \forall a \in A$$

$w \in \text{Ker } p = X$ donc $p(w) = 0$. Or $u = 1 \otimes 1 - w$, d'où $p(u) = 1$.
Donc u est une diagonale sur A.

Chapitre 3

Diagonales et dimension finie

Les exemples du chapitre précédent ont montré qu'une algèbre de dimension finie pouvait avoir une ou plusieurs diagonales, mais "être de dimension finie" n'est pas une condition suffisante comme le prouve le contre-exemple de T_2. Cependant, nous prouverons que si une algèbre unitale admet une diagonale, elle est nécessairement de dimension finie. Enfin nous caractériserons complètement les algèbres unitales possédant une diagonale, en prouvant qu'elles sont isomorphes aux $C^\star-$algèbres de dimension finie.

3.1 Algèbres possédant une diagonale

Proposition 3-1 : Soit A une algèbre unitale possédant une diagonale. Alors A est de dimension finie.

Démonstration : Soit $u = \sum_{k=1}^{N} a_k \otimes b_k$ une diagonale sur A. Utilisant le résultat du lemme 1-1-11, on peut supposer les familles $\{a_1, \cdots, a_N\}$ et $\{b_1, \cdots, b_N\}$ libres.
Démontrons que $\{a_j b_i\}_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ engendre A.

Comme u est une diagonale, alors $\forall x \in A \ \sum_{k=1}^{N} (xa_k) \otimes b_k = \sum_{k=1}^{N} a_k \otimes (b_k x)$. Or via l'injection $A \otimes A \hookrightarrow \mathcal{B}(A^*, A)$, l'égalité précédente se réécrit :

$$\forall x \in A \ \ \forall \phi \in A^* \ \ \sum_{k=1}^{N} \phi(xa_k) b_k = \sum_{k=1}^{N} \phi(a_k) b_k x \quad (1)$$

La famille $\{a_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$ étant libre, pour tout $j = 1, \cdots, N$ on peut trouver une forme linéaire $\phi_j \in A^*$ telle que $(\phi_j(a_1), \cdots, \phi_j(a_N)) = e_j$, où $e_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, le 1 étant situé en j^{eme} place, i.e

$$\forall i, j = 1, \cdots, N \ \ \phi_j(a_i) = \delta_{ij} \quad (2)$$

Mais alors

$$\forall j = 1, \cdots, N \ \ \forall x \in A \ \ b_j x = \sum_{i=1}^{N} \phi_j(a_i) b_i x$$

D'où

$$a_j b_j x = \sum_{i=1}^{N} \phi_j(a_i) a_j b_i x$$

Sommant sur j et utilisant le fait que $\sum_{j=1}^{N} a_j b_j = 1$ (car u diagonale), il vient $x = \sum_{i,j=1}^{N} \phi_j(a_i) a_j b_i x$.
Mais

$$\sum_{i,j=1}^{N} \phi_j(a_i) a_j b_i x = \sum_{j=1}^{N} a_j \Big(\sum_{i=1}^{N} \phi_j(a_i) b_i x \Big)$$

D'après (1)

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \Big(\sum_{i=1}^{N} \phi_j(a_i) b_i x \Big) = \sum_{j=1}^{N} a_j \Big(\sum_{i=1}^{N} \phi_j(x a_i) b_i \Big)$$

Soit

$$x = \sum_{i,j=1}^{N} \phi_j(x a_i) a_j b_i$$

Donc

$$x \ \in < \{ a_j b_i \ ; \ 1 \leqslant i, j \leqslant N \} >$$

et la conclusion s'ensuit. $\square$

3.2 $C^\star-$algèbres de dimension finie

Proposition 3-2-1 : Toute $\mathcal{C}^\star-$algèbre de dimension finie possède une diagonale.

Démonstration : Soit A une $\mathcal{C}^\star-$algèbre de dimension finie. D'après [Ta, p50], on sait que A est isomorphe à une $\mathcal{C}^\star-$algèbre de la forme $M_{n_1} \oplus \cdots \oplus M_{n_N}$. Utilisant la proposition 2-2, on est ramené à prouver que $M_{n_1} \oplus \cdots \oplus M_{n_N}$ possède (au moins) une diagonale. On peut donc supposer que $A = M_{n_1} \oplus \cdots \oplus M_{n_N}$
Pour chaque $1 \leqslant j \leqslant N$, on a une injection canonique $M_{n_j} \subset A$ (c'est $I_j \,:\, a_j \in M_{n_j} \longmapsto (0, \cdots, a_j, \cdots, 0)$), et donc une injection canonique $M_{n_j} \otimes M_{n_j} \subset A \otimes A$, que nous noterons J_j. Pour chaque j, soit u_j une diagonale de M_{n_j}. Pour tout $a = (a_1, \cdots, a_N) \in A$, on a

$$a J_j(u_j) = J_j(a_j u_j) = J_j(u_j a_j) = J_j(u_j) a$$

Posons

$$u = \sum_{j=1}^{N} J_j(u_j)$$

Par ce qui précède, $u \in A \otimes A$ est une diagonale de A.

Remarque 3-2-2 : la notion de $\mathcal{C}^\star-$**algèbre** de dimension finie (donc unitale) apporte un plus par rapport à celle d'algèbre unitale de dimension finie. Si toute algèbre unitale n'admet pas nécessairement de diagonale, toute $\mathcal{C}^\star-$algèbre en a nécessairement (au moins) une.

3.3 Résultats principaux

Le résultat suivant précise la proposition 3-1. Nous obtiendrons comme corollaire la description complète des algèbres unitales possédant une diagonale.

Théorème 3-3-1 : Soit A une algèbre unitale. Si A admet une diagonale, alors A est isomorphe à une somme directe d'algèbres matricielles, i.e $A \approx M_{n_1} \oplus \cdots \oplus M_{n_N}$

On aura besoin des 2 lemmes suivants :

Lemme 3-3-1-1 : Soit $A \subset M_N$ une sous-algèbre unitale possédant une diagonale. Alors $A = A''$ (A'' désigne le bicommutant de A).

Démonstration : Soient $u = \sum_i a_i \otimes b_i$ une diagonale de A et $\phi : M_N \longrightarrow M_N$ définie par :

$$\forall T \in M_N, \quad \phi(T) = \sum_i a_i T b_i$$

En reprenant des arguments similaires à la démonstration de la proposition 2-4, on démontre que ϕ est à valeurs dans A'. Donc pour tout $S \in A''$ on a

$$\forall T \in M_N, \quad \sum_i S a_i T b_i = \sum_i a_i T b_i S$$

Utilisant les mêmes notations que celles de la proposition 2-4, on démontre que
$\forall S \in A'' \;\; Su - uS \in \bigcap_{T \in M_N} Ker\tilde{\Psi}_T = \{0\}$. On en déduit que pour tout $S \in A''$,

$$\sum_i S a_i \otimes b_i = \sum_i a_i \otimes b_i S$$

Donc u est en fait une diagonale de A''. On a vu au cours de la démonstration de la proposition 3-1 que ceci impliquait que la famille $\{a_i b_j \; ; \; i, j \geqslant 1\}$ était génératrice de A''. D'où $A'' \subset A$ et comme l'inclusion inverse est toujours vérifiée, on obtient l'égalité souhaitée.

On rappelle la définition suivante : Soit $A \subset M_N \simeq \mathcal{B}(l^2_N)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel $K \subset l^2_N$ est A-invariant si $a(h) \in K$ pour tout $a \in A$ et pour tout $h \in K$.

Lemme 3-3-1-2 : Soit $A \subset M_N$ une sous-algèbre unitale possédant une diagonale. Si les seuls sous-espaces vectoriels A-invariants de l^2_N sont (0) et l^2_N, alors $A = M_N$.

Démonstration : D'après le lemme 1, il suffit de démontrer que $A' =< I >$ (car alors $A'' = M_N$ et donc $A = M_N$). Supposons au contraire qu'il existe $T \in A'$ non scalaire. Il admet un sous-espace propre K ($K \neq (0)$ et $K \neq l^2_N$). Soit $h \in K \setminus \{0\}$ et λ la valeur propre associée à h. Soit $a \in A$. Comme $T \in A'$, on a : $T(ah) = aT(h) = a\lambda h = \lambda ah$. D'où $(T - \lambda I_N)(ah) = 0$. Ainsi $ah \in K$. Ce qui prouve que K est $A-$invariant. Contradiction.

Démonstration de 3-3-1 : Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des opérateurs "multiplications à gauche" de A, i.e $\mathcal{L} = \{l_a : A \longrightarrow A, b \longmapsto ab \; ; \; a \in A\} \subset \mathcal{L}(A)$. On vérifie aisément que $\mathcal{L}$ est une algèbre (unitale) d'opérateurs sur A et que l'application $l : A \longrightarrow \mathcal{L}, \; a \longmapsto l_a$ est un isomorphisme d'algèbres unitales. Comme A est de dimension finie (disons n), $\mathcal{L}(A)$ s'identifie à M_n via l'isomorphisme (unital) d'algèbres $u \in \mathcal{L}(A) \longmapsto$ Mat $(u \; ; \; e)$, où e est une base fixée de A. Par composition

de ces deux isomorphismes, on peut représenter A comme une sous-algèbre de M_n. On notera $\pi : A \longrightarrow M_n$ une telle représentation. Comme A possède une diagonale, il en est de même de $\pi(A)$ d'après la proposition 2-2. On identifiera alors A et $\pi(A)$, ce qui permet de supposer que $A \subset M_n$. Parmi tous les entiers n tels qu'il existe un homomorphisme injectif unital $\pi : A \longrightarrow M_n$, choisissons le plus petit d'entre eux.
Si les seuls sous-espace vectoriels $A-$invariants sont (0) et l_n^2, on a d'après le lemme 3-3-1-2 que $A = M_n$ et le résultat annoncé s'ensuit. Sinon il existe un sous-espace vectoriel $A-$invariant strict K de l_n^2 que l'on choisit de dimension minimale. Notons P_K la projection orthogonale sur K. Soit $a \in A \subset M_n \approx \mathcal{B}(l_n^2)$. K étant $A-$invariant, on a que K est stable par a, ce qui équivaut d'après un résultat classique que $P_K a P_k = aP_K$. Donc P_K est par définition une projection orthogonale invariante pour A. On notera $P_K = p$. Ainsi $\forall\ a \in A \quad pap = ap$
On vérifie facilement que $X = pM_n(1-p)$ est un $A-$bimodule et que l'application

$$\delta : \left\{ \begin{array}{l} A \longrightarrow X \\ a \mapsto \delta(a) = pa(1-p) = pa - ap \end{array} \right. \qquad (1)$$

définit une dérivation de A sur X.
D'après la proposition 2-5-3, δ est une dérivation intérieure, donc il existe $x \in X$ tel que

$$\forall\ a \in A \quad \delta(a) = ax - xa \quad (2)$$

Combinant (1) et (2), on voit que $p + x$ commute avec A. Par définition de X, on a $x^2 = 0$. On en déduit que l'élément $y = 1 + x$ est inversible dans M_n et son inverse est $y^{-1} = 1 - x$.
On a pour tout $a \in A$:

$$p(1+x)a(1-x) = (p+px)a(1-x) = (p+x)a(1-x) = a(p+x)(1-x) = ap$$

et

$$(1+x)a(1-x)p = (1+x)ap = (1+x)pap = pap = ap$$

Ce qui prouve que p commute avec $B = yAy^{-1}$. Donc $\forall\ b \in B \quad pb = bp$. Notant toujours K l'image de la projection p, l'égalité précédente est équivalente au fait que K et $K^\perp$ sont stables par b, et comme b est quelconque dans B, K et $K^\perp$ sont stables par tous les éléments de B. Comme $l_n^2 = K \oplus K^\perp$, on a en prenant pour base de l_n^2 une base de K suivie d'une base de $K^\perp$ que les éléments de B s'écrivent comme une matrice bloc 2×2 dont les blocs non diagonaux sont nuls, ie $T \in B$ s'écrit $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ où $T_1 = pT_{|K} \in \mathcal{B}(K)$ et $T_2 = (1-p)T_{|K^\perp} \in \mathcal{B}(K^\perp)$. On notera par la suite $q = 1 - p$.
Remarquons d'abord que A et $B = yAy^{-1}$ sont isomorphes en tant qu'algèbres unitales, par conséquent B possède une diagonale d'après la proposition 2-2. Soient $B_1 = Bp\ (= pB)$ et $B_2 = Bq\ (= qB)$ de sorte que $B \subset B_1 \oplus B_2$. De plus, tout sous-espace vectoriel de K qui est B_1-invariant est aussi $B-$invariant, donc par minimalité de la dimension de K, cela implique que les seuls sous-espaces B_1-invariants de K sont (0) et K. D'où $B_1 = \mathcal{B}(K)$.
De plus, l'application $u : B \longmapsto \mathcal{B}(K^\perp)$ définie par $u : \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \longmapsto T_2$ a un noyau isomorphe à $I = \left\{ T \in \mathcal{B}(K) \ ; \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B \right\}$. u étant un homomorphisme unital, il s'ensuit par minimalité de n que u n'est pas injectif, donc que $I \neq (0)$. Or I est un idéal de $\mathcal{B}(K)$ et $\mathcal{B}(K)$ est simple, donc $I = \mathcal{B}(K)$.
Ce qui précède montre que pour tout $T \in \mathcal{B}(K^\perp)$:

$$T \in B_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \in B$$

Donc

$$B = \mathcal{B}(K) \oplus B_2 = B_1 \oplus B_2$$

On vérifie que B_1 et B_2 sont respectivement des algèbres unitales, d'unités respectives p et q. De plus, si $u = \sum_i a_i \otimes b_i$ est une diagonale de B, alors $v = \sum_i (pa_i) \otimes (b_i p)$ (respectivement $w = \sum_i (qa_i) \otimes (b_i q)$) est une diagonale de B_1 (respectivement de B_2). Posons $n_1 = \dim K$ et $n_2 = \dim K^\perp$. Par ce qui précède, on peut supposer $B_1 \subset M_{n_1}$ et $B_2 \subset M_{n_2}$.
Si les seuls sous-espaces vectoriels B_1-invariants de $l^2_{n_1}$ sont (0) et $l^2_{n_1}$ (ce qui implique que les seuls sous-espaces vectoriels B_2-invariants de $l^2_{n_2}$ sont (0) et $l^2_{n_2}$), alors par le lemme 3-3-1-2, $B_1 = M_{n_1}$ et $B_2 = M_{n_2}$. D'où $B = M_{n_1} \oplus M_{n_2}$ et comme $A \approx B$ on a le résultat voulu. Sinon on réitère le processus précédent en choisissant des projections invariantes orthogonales pour B_1 et B_2 et en conjuguant par les éléments inversibles correspondants. On conclut par récurrence.

Corollaire 3-3-2 : Une algèbre unitale admet une diagonale si et seulement si elle est isomorphe à une $\mathcal{C}^\star-$algèbre de dimension finie.

Démonstration : La première implication résulte directement du théorème précédent. Réciproquement, supposons que A algèbre unitale soit isomorphe à une $\mathcal{C}^\star-$algèbre de dimension finie. D'après la proposition 3-2-1, toute $\mathcal{C}^\star-$algèbre de dimension finie possède une diagonale. D'après la proposition 2-2, il en est alors de même pour A.

Chapitre 4

Diagonale, algèbres d'opérateurs et produit de Haagerup

Dans cette section, nous commençons par étudier quelques propriétés du produit tensoriel de Haagerup introduit au chapitre 1. Puis nous définissons la notion de h-diagonale sur $X \otimes_h Y$, presque analogue à celle de diagonale sur $X \otimes Y$, si ce n'est que la topologie de $|| \cdot ||_h$ apporte quelques faits supplémentaires. Nous énonçons ensuite le théorème principal : si une algèbre d'opérateurs unitale A admet une h-diagonale, alors elle est de dimension finie. Ce résultat est à rapprocher de la proposition 3-1, de nature purement algébrique.

4.1 Propriétés de $X \otimes_h Y$

4.1.1 Représentation d'un élément de $X \otimes_h Y$

Proposition 4 -1 -1 -1 : Soient X et Y deux espaces d'opérateurs. Tout élément z de $X \otimes_h Y$ s'écrit sous la forme $z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes b_k$, la série étant convergente en norme, i.e :

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| z - \sum_{k=1}^{N} a_k \otimes b_k \right\| = 0$$

De plus, les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k a_k^* \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^* b_k \quad \text{convergent}$$

Démonstration : On rappelle que

$$||z||_h = \inf \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^* \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} b_k^* b_k \right\|^{\frac{1}{2}} \; ; \; z = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k, \; a_k \in X, \; b_k \in Y, \; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Sans perte de généralité on peut supposer $||z||_h < 1$. Fixons $\epsilon > 0$.
Par définition de $X \otimes_h Y$ (cf 1-3) il existe $w_1 \in X \otimes Y$ tel que

$$||z - w_1||_h < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad ||w_1||_h < 1$$

Par définition de $||\cdot||_h$, il existe un entier n_1 tel que

$$w_1 = \sum_{k=1}^{n_1} a_k \otimes b_k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{n_1} a_k a_k^* \leqslant 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{n_1} b_k^* b_k \leqslant 1$$

Utilisant les mêmes arguments, il existe $w_2 \in X \otimes Y$ tel que $||z - w_1 - w_2||_h < \frac{\epsilon}{2^2}$ et $||w_2||_h < \frac{\epsilon}{2}$
Par définition de $||\cdot||_h$, il existe un entier n_2 tel que

$$w_2 = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k \otimes b_k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k a_k^* \leqslant \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n_1+1}^{n_2} b_k^* b_k \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Par récurrence, on construit pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ une suite de tenseurs de rang finis

$$w_m = \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} a_k \otimes b_k$$

tels que :

$$||z - w_1 - w_2 - \cdots - w_m||_h < \frac{\epsilon}{2^m}, \quad \text{avec} \quad \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} a_k a_k^* \leqslant \frac{\epsilon}{2^{m-1}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} b_k^* b_k \leqslant \frac{\epsilon}{2^{m-1}}$$

On en déduit rapidement que la suite $\tilde{w}_n = w_1 + \cdots + w_n$ converge dans $X \otimes_h Y$ vers z.
Soit $W_N = \sum_{k=1}^{N} a_k \otimes b_k$ une somme partielle de la série des $a_k \otimes b_k$. Il existe un unique entier m tel que $n_{m-1} + 1 \leqslant N \leqslant n_m$, où la suite des n_k a été construite précédemment. Mais alors $W_N = \tilde{w}_{m-1} + \sum_{k=n_{m-1}+1}^{N} a_k \otimes b_k$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\|z - W_N\| &\leqslant \|z - \tilde{w}_{m-1}\| + \left\| \sum_{k=n_{m-1}+1}^{N} a_k a_k^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{k=n_{m-1}+1}^{N} b_k^* b_k \right\|^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|z - \tilde{w}_{m-1}\| + \left\| \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} a_k a_k^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} b_k^* b_k \right\|^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|z - \tilde{w}_{m-1}\| + \frac{\epsilon}{2^{m-1}}
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes b_k$ converge en norme vers z.

De plus, les sommes partielles de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k a_k^*$ et de $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^* b_k$ convergent (on prouve que les sommes partielles sont de Cauchy) en norme vers des éléments de norme $\leqslant 1 + 2\epsilon$. On a même pour tout entier N

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k a_k^* \right\| \leqslant 1 + 2\epsilon$$

ce qui implique que :

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} a_k a_k^* \Big\|^{\frac{1}{2}} \leqslant 1+\epsilon$$

D'où le résultat.

remarque 4-1-1-2 : De manière générale : pour tout $z \in X \otimes_h Y$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux suites $(a_k)_k$ de X et $(b_k)_k$ de Y telles que $z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes b_k$ et

$$\Big\| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k a_k^* \Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^* b_k \Big\|^{\frac{1}{2}} \leqslant \|z\|_h + \epsilon$$

Proposition-définition 4-1-1-3 : (1) Soit A une algèbre d'opérateurs et $c \in A$. L'application

$$\tilde{m}_c : \begin{cases} A \otimes A \longrightarrow A \otimes A \\ \sum_k a_k \otimes b_k \longmapsto \sum_k (ca_k) \otimes b_k \end{cases}$$

est bien définie, continue et s'étend de manière unique en une application linéaire continue m_c : $A \otimes_h A \longrightarrow A \otimes_h A$.

(2) Pour $u \in A \otimes_h A$, on pose $cu = m_c(u)$ et si u s'écrit $u = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \otimes b_k$, alors $cu = \sum_{k=1}^{+\infty} (ca_k) \otimes b_k$

Démonstration : (1) Le fait que $\tilde{m}_c$ soit bien définie vient du fait que $A \otimes A$ est un $A-$bimodule : pour $c \in A$, si $\sum_k a_k \otimes b_k = \sum_l a'_l \otimes b'_l$ on a :

$$\sum_k (ca_k) \otimes b_k = c\Big(\sum_k a_k \otimes b_k\Big) = c\Big(\sum_l a'_l \otimes b'_l\Big) = \sum_l (ca'_l) \otimes b'_l$$

Soit $x = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k \in A \otimes A$. Par définition de $\| \cdot \|_h$, on a :

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k=1}^{n} (ca_k) \otimes b_k \Big\| &\leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{n} (ca_k)(ca_k)^* \Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\| \sum_{k=1}^{n} b_k^* b_k \Big\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \|c\| \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^* \Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\| \sum_{k=1}^{n} b_k^* b_k \Big\|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Passant à l'inf sur l'ensemble des représentations de x, on en déduit que $\tilde{m}_c$ est continue et que $\|\tilde{m}_c\| \leqslant \|c\|$. Donc $\tilde{m}_c$ s'étend de manière unique en une application linéaire continue $m_c : A \otimes_h A \longrightarrow A \otimes_h A$.

(2) Soit $u \in A \otimes_h A$. D'après la proposition 4-1-1-1, u peut s'écrire sous la forme $u = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \otimes b_k$ (série convergente). mais alors :

$$cu = m_c(u) = m_c\Big(\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k\Big) = \lim_{n \to +\infty} m_c\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k\Big) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (ca_k) \otimes b_k$$

On en déduit que la série $\sum_{k=1}^{+\infty}(ca_k)\otimes b_k$ converge et que $cu = \sum_{k=1}^{+\infty}(ca_k)\otimes b_k$.

Le résultat qui suit nous sera utile dans la démonstration du résultat principal de ce chapitre.

Proposition 4-1-1-4 : Soit A une algèbre d'opérateurs unitale et $\phi \in A^*$. On définit

$$R_\phi : A\otimes A \longrightarrow A \quad \text{par} \quad R_\phi\Big(\sum_k a_k\otimes b_k\Big) = \sum_k \phi(a_k)b_k$$

Alors R_ϕ s'etend de manière unique en un opérateur borné sur $A\otimes_h A$. De plus, si $u \in A\otimes_h A$ s'écrit $u = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\otimes b_k$, alors $R_\phi(u) = \sum_{k=1}^{+\infty}\phi(a_k)b_k$.

Démonstration : A étant une algèbre d'opérateurs, on a $A\subset \mathcal{B}(H)$ pour un certain Hilbert H. Notons 1 l'unité de A. Soit $x\in A\otimes A$. Il existe a_k et b_k éléments de A tels que $x = \sum_{k=1}^{n} a_k\otimes b_k$. On a :

$$\begin{pmatrix} \phi(a_1)1 & \cdots & \phi(a_n)1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}\phi(a_k)b_k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Notons V la première matrice et W la seconde. Il vient $\Big\|\sum_{k=1}^{n}\phi(a_k)b_k\Big\| \leqslant \|V\|\|W\|$.

Mais $\|V\| = \Big(\sum_{k=1}^{n}|\phi(a_k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ et $\|W\| = \Big\|\sum_{k=1}^{n} b_k^*b_k\Big\|^{\frac{1}{2}}$.

D'autre part, ϕ étant une forme linéaire, ϕ est complètement bornée avec $\|\phi\|_{cb} = \|\phi\|$. D'où

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}|\phi(a_k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\phi\|\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_ka_k^*\Big\|^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit que

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\phi(a_k)b_k\Big\| \leqslant \|\phi\|\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_ka_k^*\Big\|^{\frac{1}{2}}\Big\|\sum_{k=1}^{n} b_k^*b_k\Big\|^{\frac{1}{2}}$$

Passant à l'inf sur toutes les représentations de x, on obtient que R_ϕ est une application bornée (de norme inférieure ou égale à celle de ϕ). D'après le théorème de prolongement des applications linéaires continues, R_ϕ s'étend de manière unique en une application linéaire continue sur $A\otimes_h A$.

remarque 4-1-1-5 : Ce qui précède permet de donner un sens aux expressions du type

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\phi(a_k)b_k \quad \text{où} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} a_k\otimes b_k \in A\otimes_h A \quad \text{et} \quad \phi\in A^*$$

4.1.2 La notion de h-diagonale

On "prolonge" la définition de diagonale vue au chapitre 2. La norme définie sur l'algèbre d'opérateurs A ainsi que les propriétés de la norme de Haagerup sur $A \otimes_h A$ généralisent en quelque sorte les définitions et propriétés de nature algébrique rencontrées auparavant. Mais cette structure topologique nécessite de nouveaux outils (outre les raisonnements classiques de passage à la limite et les théorèmes standards d'analyse fonctionnelle) pour effectuer cette "généralisation". L'un d'entre eux est la notion de strong-independance étudiée au paragraphe suivant.

Proposition 4-1-2-1 : Soit A une algèbre d'opérateurs et $p : A \otimes A \longrightarrow A$ l'application linéaire induite par la multiplication sur A. Alors p s'étend de manière unique en une contraction $\hat{p} : A \otimes_h A \longrightarrow A$.

Démonstration : Soit $x \in A \otimes A$. Il existe a_k et b_k éléments de A tels que $x = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k$. On a

$$\|p(x)\| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^* \Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\| \sum_{k=1}^{n} b_k^* b_k \Big\|^{\frac{1}{2}}$$

En passant à l'inf sur l'ensemble des représentations de x, on a $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Donc p est une contraction. D'après le théorème de prolongement des applications linéaires continues, p s'étend de manière unique en une application linéaire continue $\hat{p}$ sur $A \otimes_h A$.
Soit $z \in A \otimes_h A$. On a vu à la proposition 4-1-1-1 que l'on pouvait écrire z sous la forme

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes b_k$$

la série étant convergente en norme, avec :

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k a_k^* \Big\| < +\infty \quad \text{et} \quad \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k^* b_k \Big\| < +\infty$$

D'où

$$\hat{p}(z) = \hat{p}\Big(\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k \Big) = \lim_{n \to +\infty} \hat{p}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k \Big) = \lim_{n \to +\infty} p\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k \Big)$$

Soit

$$\hat{p}(z) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

On posera donc

$$\hat{p}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$$

De plus, en tant qu'extension de p, $\hat{p}$ a la même norme que p. donc $\hat{p}$ est aussi une contraction.

remarque 4-1-2-2 : Dans la démonstration précédente, on a vu que si $z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes b_k \in A \otimes_h A$, alors $\hat{p}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ (série convergente).

Nous pouvons à présent, au vu de tous les résultats obtenus avant donner un sens à la :

Définition 4-1-2-3 : Soit A un espace d'opérateurs. On appelle **h-diagonale** sur A un élément u de $A \otimes_h A$ tel que :

1. $\forall c \in A \quad uc = cu$
2. $\hat{p}(u) = 1$

Autrement dit une h-diagonale sur A est un élément $u = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \otimes b_i$ de $A \otimes_h A$ tel que

$$\forall c \in A \quad uc = cu \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i = 1$$

4.1.3 Indépendance forte

Définitions et notations

Notations : (1) Soit H un espace de Hilbert. H^∞ désigne la somme d'une infinité de copies de H.
(2) Soit $u \in A \otimes_h A$ (A algèbre d'opérateurs). En vertu de la proposition 4-1-1, il existe des familles $\{a_i\}_{i \geqslant 1}$ et $\{b_i\}_{i \geqslant 1}$ d'éléments de A telles que $u = \sum_{i \geqslant 1} a_i \otimes b_i$ et les séries $\sum_{i \geqslant 1} a_i a_i^*$ et $\sum_{i \geqslant 1} b_i^* b_i$ convergent. On posera $u = a \odot b$, où $a = (a_1, a_2, \cdots)$ et $b = {}^t(b_1, b_2, \cdots)$

Définition 4-1-3-1 : (1) Un opérateur $s \in \mathcal{B}(H^\infty; H)$ peut être vu comme une matrice ligne d'opérateurs $s_i \in \mathcal{B}(H)$, où $\sum_{i \geqslant 1} s_i s_i^* \in \mathcal{B}(H)$.
(2) Un opérateur $t \in \mathcal{B}(H; H^\infty)$ peut être vu comme une matrice colonne d'opérateurs $t_i \in \mathcal{B}(H)$, où $\sum_{i \geqslant 1} t_i^* t_i \in \mathcal{B}(H)$.

remarque 4-1-3-2 : Avec la définition précédente, si $u = a \odot b \in A \otimes_h A$, on a en vertu de la proposition 4-1-1-1 : $a \in \mathcal{B}(H^\infty; H)$ et $b \in \mathcal{B}(H; H^\infty)$.

On rappelle que l^2 désigne l'ensemble des suites $(\lambda_i)_{i \geqslant 1}$ à coefficients complexes telles que $\sum_{i \geqslant 1} |\lambda_i|^2$ converge, muni de la norme $\|(\lambda_i)_{i \geqslant 1}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Proposition-Définition 4-1-3-3 : (1) Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots) \in l^2$ et $s \in \mathcal{B}(H^\infty; H)$. La série $\sum_{i \geqslant 1} \lambda_i s_i$ est convergente. On note alors $\lambda \cdot s = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i s_i \in \mathcal{B}(H)$ sa somme.
(2) De même, si $t \in \mathcal{B}(H; H^\infty)$, on note $\lambda \cdot t = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i t_i$.

Démonstration : En utilisant un argument similaire au début de la démonstration de la proposition 4-1-1-4, on a :

$$\forall m \leqslant n \quad \left\| \sum_{i=m}^{n} \lambda_i s_i \right\| \leqslant \left(\sum_{i=m}^{n} |\lambda_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=m}^{n} s_i s_i^* \right\|^{\frac{1}{2}}$$

Par convergence de $\sum_{i\geqslant 1}|\lambda_i|^2$, de $\sum_{i\geqslant 1}s_is_i^*$, et positivité des $s_is_i^*$ on a alors :

$$\forall m\leqslant n \quad \Big\|\sum_{i=m}^{n}\lambda_i s_i\Big\| \leqslant \Big(\sum_{i=m}^{+\infty}|\lambda_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|\sum_{i=m}^{+\infty}s_is_i^*\Big\|^{\frac{1}{2}}$$

La quantité de droite tendant vers 0 quand m tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite des sommes partielles de $\sum_{i\geqslant 1}\lambda_i s_i$ est de Cauchy dans $\mathcal{B}(H)$ complet, donc converge.

Définition 4-1-3-4 : Soit $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ une famille d'opérateurs définissant un élément de $\mathcal{B}(H;H^\infty)$ ou de $\mathcal{B}(H^\infty;H)$. On dit que $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ est "fortement independant" si :

$$\Big(\lambda=(\lambda_i)_{i\geqslant 1}\in l^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i a_i=0\Big) \Rightarrow \forall i\geqslant 1 \ \ \lambda_i=0$$

Remarquons que le forte indépendance de $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ n'a pas la même signification que $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ est libre.

Propriétés

Lemme 4-1-3-5 : Soit $a=(a_1,a_2,\cdots)\in\mathcal{B}(H^\infty;H)$. Alors $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ est "fortement independant" si et seulement si $K=\{(\phi(a_1),\phi(a_2),\cdots)\ ;\ \phi\in\mathcal{B}(H)^*\}$ est dense dans l^2.

Démonstration : On démontrera les deux implications par contraposée.
($\Rightarrow$) Supposons que K n'est pas dense dans l^2. Alors $K^\perp$ contient un élément **non nul** $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$. De plus, on a par définition de K et du produit scalaire de l^2 :

$$\forall\phi\in\mathcal{B}(H)^* \quad \sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\overline{\phi(a_i)}=0=\sum_{i=1}^{+\infty}\overline{\lambda_i}\phi(a_i)$$

Soit :

$$\forall\phi\in\mathcal{B}(H)^* \quad \phi\Big(\sum_{i=1}^{+\infty}\overline{\lambda_i}a_i\Big)=0$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\overline{\lambda_i}a_i=0$$

Ce qui contredit la "forte independance" de $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ n'est pas "fortement independant". Alors il existe un élément non nul $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ de l^2 tel que $\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i a_i=0$. Ainsi :

$$\forall\phi\in\mathcal{B}(H)^* \quad \phi\Big(\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i a_i\Big)=\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\phi(a_i)=0$$

Par définition du produit scalaire sur l^2 et de K, on en déduit que $(\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},\cdots)\in K^\perp$. Donc K n'est pas dense dans l^2. $\square$

En corollaire immédiat, on obtient que si $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ est "strong independant", alors pour $b=(b_1,b_2,\cdots)\in l_2$ et $\epsilon>0$ fixés, il existe $\phi\in\mathcal{B}(H)^*$ tel que

$$\|(\phi(a_1),\phi(a_2),\cdots)-(b_1,b_2,\cdots)\|_2<\epsilon$$

Proposition 4-1-3-6 : Soient $s\in\mathcal{B}(H^\infty;H)$ et $t\in\mathcal{B}(H;H^\infty)$. Alors il existe des opérateurs unitaires u et v de $\mathcal{B}(l^2)$ tels que les composantes $\tilde{s}_i$ et $\tilde{t}_i$ de $\tilde{s}=sv$ et $\tilde{t}=ut$ vérifient :
(i) $\tilde{s}_{2i-1}=0$ et $\tilde{t}_{2i-1}=0$ pour tout $i\geqslant 1$.
(ii) $\tilde{s}_i\in<\{s_j\}>$ et $\tilde{t}_i\in<\{t_j\}>$, avec $\{\tilde{s}_{2i}\}_{i\geqslant 1}$ et $\{\tilde{t}_{2i}\}_{i\geqslant 1}$ "fortement independant".
(iii) $\|\tilde{s}\|=\|s\|$ et $\|\tilde{t}\|=\|t\|$

Démonstration : On considère uniquement le cas de $t\in\mathcal{B}(H;H^\infty)$, le cas des matrices lignes se traitant de même. Considérons le sous-espace fermé de l^2 : $L_1=\{\lambda\in l^2\ ;\ \lambda\cdot t=0\}$, de sorte que $l^2=L_1\oplus L_1^\perp$. Soit $\{\alpha_i\}_{i\geqslant 1}$ une base de l^2 telle que $\{\alpha_{2i-1}\}_{i\geqslant 1}$ soit une base de L_1 et $\{\alpha_{2i}\}_{i\geqslant 1}$ soit une base de $L_1^\perp$. Par Gram-Schmidt, on peut supposer ces bases orthonormales. Notons u la matrice (infinie) unitaire dont la i^{eme} ligne est α_i. On pose $\tilde{t}=ut$. Ainsi, utilisant les notations de 4-1-3-3, on a $\forall i\geqslant 1\ \ \tilde{t}_i=\alpha_i\cdot t$.

Par construction, $\tilde{t}_{2i-1}=\tilde{\alpha}_{2i-1}\cdot t=0$. De plus, soit $(\lambda_i)\in l^2$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\tilde{t}_{2i}=0$, ie

$$\Big(\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\tilde{\alpha}_{2i}\Big)\cdot t=0$$

Mais alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\tilde{\alpha}_{2i}\in L_1$. Comme $\{\tilde{\alpha}_{2i}\}$ est une base de $L_1^\perp$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\tilde{\alpha}_{2i}=0$ et $\forall i\geqslant 1\ \ \lambda_i=0$. Donc $\{\tilde{t}_{2i}\}$ est "fortement independant".
Le point (ii) est clair et le point (iii) résulte du fait que u et v sont unitaires. $\square$

On aura besoin par la suite de la notion d'espace de Hilbert ligne et d'espace de Hilbert colonne afin de prouver que l'on peut représenter un élément u de $X\otimes_h Y$ sous la forme $u=\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}a_i\otimes b_i$ où $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ est fortement indépendante. Par ailleurs si H est un espace de Hilbert et $x,\ y\in H$, l'application $\overline{x}\otimes y$ est définie sur H par $\overline{x}\otimes y(\zeta)\ =<\zeta\ ;\ x>y$.

Proposition-Définition 4-1-3-7 : (1) Soit H un Hilbert et $e\in H$ de norme 1. Alors les espaces d'opérateurs

$$X_1(e)=\{\overline{e}\otimes x\ ;\ x\in H\}\subset\mathcal{B}(H)$$

et

$$X_2(e)=\{\overline{x}\otimes e\ ;\ x\in H\}\subset\mathcal{B}(H)$$

sont isométriques à H. Si de plus, e et e' sont deux vecteurs de norme 1, alors $X_1(e)$ et $X_2(e)$ sont complètement isométriques via l'application $\overline{e}\otimes x\longmapsto\overline{e'}\otimes x$.
(2) On appelle alors H^c (espace de Hilbert colonne) n'importe lequel des espaces $X_1(e)$.
De même on appelle H^r (espace de Hilbert ligne) n'importe lequel des espaces $X_2(e)$.

Proposition 4-1-3-8 : (1) Etant donné une famille orthogonale $\{e_1,\cdots,e_N\}$ de H et un $N-$uplet

$(x_1, \cdots, x_N)$ d'un espace d'opérateurs X, on a

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} \overline{e_k} \otimes x_k : H^c \longrightarrow X \Big\|_{cb} = \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{N} x_k x_k^* \Big) \Big\|^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} \overline{x_k} \otimes e_k : H^r \longrightarrow X \Big\|_{cb} = \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{N} x_k^* x_k \Big) \Big\|^{\frac{1}{2}}$$

(2) Via l'identification isométrique entre H et H^c, tout opérateur borné $u : H \longrightarrow H$ est complètement borné de H^c dans H^c, avec $\|u : H^c \longrightarrow H^c\|_{cb} = \|u\|$.

Lemme 4-1-3-9 : Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, soit $(e_k)_{k\geqslant 1}$ une base Hilbertienne de H et $\forall\, N \geqslant 1 \quad P_N : H \longrightarrow H$ la projection orthogonale d'image $< \{e_1, \cdots, e_N\} >$. Soit $T : H^c \longrightarrow X$ complètement bornée. Alors $\lim\limits_{N\to+\infty} \|TP_N - T\|_{cb} = 0$ si et seulement si T est la limite dans $CB(H^c; X)$ d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Démonstration : On ne démontre qu'une implication, l'autre étant immédiate. Notons $CB_F(H^c\ ;\ X) \subset CB(H^c\ ;\ X)$ l'adhérence des opérateurs de rang fini. Soient $\zeta \in H$, $z \in X$ et $T = \overline{\zeta} \otimes z$. Alors $TP_N = \overline{P_N(\zeta)} \otimes z$. Donc $T - TP_N = (\overline{\zeta} - \overline{P_N(\zeta)}) \otimes z$ d'où comme $\|a \otimes z\| = \|a\|\|z\|$, il vient $\|T - TP_N\|_{cb} = \|\zeta - P_N(\zeta)\|\|z\| \longrightarrow 0$. Par combinaison linéaire, on en déduit que $\|TP_N - T\|_{cb} \longrightarrow 0$ pour tout opérateur T de rang fini. Comme $\|P_N\| = 1$, on en déduit par équicontinuité que $\|TP_N - T\|_{cb} \longrightarrow 0$ pour tout $T \in CB_F(H^c\ ;\ X)$.

Proposition 4-1-3-10 : On note $C = (l^2)^c$ et $R = (l^2)^r$ et $(e_k)_{k\geqslant 1}$ la base canonique de l^2.
(1) Soient $(x_k)_{k\geqslant 1}$ et $(y_k)_{k\geqslant 1}$ deux suites de X et Y et soient

$$\alpha_N = \sum_{k=1}^{N} \overline{e_k} \otimes x_k \in CB(C\ ;\ X) \quad \text{et} \quad \beta_N = \sum_{k=1}^{N} \overline{e_k} \otimes y_k \in CB(R\ ;\ X)$$

Si la suite $(\alpha_N)_N$ converge dans $CB(C\ ;\ X)$ et si la suite $(\beta_N)_N$ converge dans $CB(R\ ;\ X)$ alors la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} x_k \otimes y_k$ converge dans $X \otimes_h Y$. Dans ce cas, on a de plus

$$\Big\| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \otimes y_k \Big\|_h \leqslant \| \lim_N \alpha_N \|_{cb} \| \lim_N \beta_N \|_{cb} = \Big\| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k x_k^* \Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\| \sum_{k=1}^{+\infty} y_k^* y_k \Big\|^{\frac{1}{2}}$$

(2) Réciproquement, pour tout $u \in X \otimes_h Y$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux suites $(x_k)_{k\geqslant 1}$ et $(y_k)_{k\geqslant 1}$ de X et Y telles que les suites

$$\Big(\sum_{k=1}^{N} \overline{e_k} \otimes x_k \Big)_N \quad \text{et} \quad \Big(\sum_{k=1}^{N} \overline{e_k} \otimes y_k \Big)_N$$

convergent dans $CB(C\ ;\ X)$ et $CB(R\ ;\ Y)$ respectivement. De plus :

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \otimes y_k$$

et

$$\Big\| \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{e_k} \otimes x_k \Big\|_{cb} \leqslant \|u\|_h + \epsilon, \quad \Big\| \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{e_k} \otimes y_k \Big\|_{cb} \leqslant \|u\|_h + \epsilon$$

Démonstration : (1) On donne l'idée :

$$\Big\| \sum_{k=M}^{N} x_k \otimes y_k \Big\|_h \leqslant \Big\| \sum_{k=M}^{N} x_k x_k^* \Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\| \sum_{k=M}^{N} y_k^* y_k \Big\|^{\frac{1}{2}} = \|\alpha_N - \alpha_M\|_{cb} \|\beta_N - \beta_M\|_{cb}$$

(2) On utilise un raisonnement analogue à celui de la proposition 4-1-1-1 et la proposition 4-1-3-8.

Proposition 4-1-3-11 : Soient X et Y deux espaces d'opérateurs sur un espace de Hilbert H et $u \in X \otimes_h Y$. Alors il existe des familles $\{a_i\}_{i\geqslant 1} \in X$ et $\{b_i\}_{i\geqslant 1} \in Y$ où $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ est fortement independante et telles que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i$.

Démonstration : On part du (2) de la proposition précédente. Soit $H = l^2$. Considérons les deux applications $\alpha : H \longrightarrow X$ et $\beta : H \longrightarrow Y$ définies par :

$$\alpha(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k \quad \text{et} \quad \beta(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} s_k y_k$$

Soit

$$K = \mathrm{Ker}(\alpha)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(\alpha^*)}$$

Soit $J : K \longrightarrow H$ l'injection canonique (de sorte que JJ^* est la projection d'image K dans H) et soient $\hat{\alpha} = \alpha J$ et $\hat{\beta} = \beta J$. On ne perd rien à supposer K de dimension infinie, ce que l'on fera. Soit alors $(\epsilon_j)_{j\geqslant 1}$ une base Hilbertienne de K et $P_N : K \longrightarrow K$ la projection orthogonale sur $< \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_N\} >$. D'après le (2) de la proposition 4-1-3-10, α est limite d'opérateurs de rang fini, il en est donc de même de $\hat{\alpha}$ par définition de celui-ci. Donc d'après le lemme 4-1-3-9, $\hat{\alpha} P_N \longrightarrow \hat{\alpha}$ dans $CB(K^c \ ; \ X)$. De même, $\hat{\beta} P_N \longrightarrow \hat{\beta}$ dans $CB(K^r \ ; \ Y)$. On pose pour tout $i \geqslant 1$:

$$a_i = \hat{\alpha}(\epsilon_i) \quad \text{et} \quad b_i = \hat{\beta}(\epsilon_i)$$

Par ce qui précède les suites

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} \overline{\epsilon_i} \otimes a_i \Big)_N \quad \text{et} \quad \Big(\sum_{i=1}^{N} \overline{\epsilon_i} \otimes b_i \Big)_N$$

convergent respectivement dans $CB(K^c \ ; \ X)$ et $CB(K^r \ ; \ Y)$. Utilisant le (1) de la proposition 4-1-3-10, on peut définir

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \otimes b_i$$

Par construction, $JJ^*\alpha^* = \alpha^*$. Donc pour tous $\phi \in X^*$ et $\psi \in Y^*$, on a :

$$< \phi \otimes \psi, u > = \sum_i \phi(x_i)\psi(y_i) = < \alpha^*(\phi)\beta^*(\psi) > = < JJ^*\alpha^*(\phi), \beta^*(\psi) >$$

D'où

$$< \phi \otimes \psi, u > = < \hat{\alpha}^*(\phi), \hat{\beta}^*(\psi) > = \sum_i \phi(a_i)\psi(b_i) = < \phi \otimes \psi, \hat{u} >$$

Donc $u = \hat{u}$. Par construction, la suite $(a_i)_{i\geqslant 1}$ est fortement indépendante, ce qui achève la preuve.

4.2 Résultat principal

Théorème 4-2-1 : Soit A une algèbre d'opérateurs . Supposons que A admette une h-diagonale, alors A est de dimension finie.

Démonstration : Soit $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i$ une h-diagonale. D'après la proposition 4-1-3-11, on peut supposer la famille $\{a_i\}_{i\geqslant 1} \in \mathcal{B}(H^\infty; H)$ fortement independante. Par définition de u, $\hat{p}(u) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i = 1$. Donc il existe un entier M tel que $\left\| \sum_{i=1}^{M} a_i b_i - 1 \right\| < \frac{1}{2}$. On rappelle que dans une algèbre de Banach unitale X, si $\|u-1\| < 1$, alors u est inversible, d'inverse $\sum_{i=0}^{+\infty}(1-u)^i$. Par conséquent, $c = \left(\sum_{i=1}^{M} a_i b_i \right)^{-1}$ existe et on a de plus $\|c\| < 2$. Définissons maintenant deux constantes k et ϵ par :

$$k = \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} a_i a_i^* \right\|^{\frac{1}{2}} , \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^* b_i \right\|^{\frac{1}{2}} \right\} , \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{1}{8Mk^2} \quad (1)$$

D'après la proposition 4-1-1-3, pour tout $x \in A$, les séries $\sum_{i=1}^{+\infty}(xa_i) \otimes b_i$ et $\sum_{i=1}^{+\infty}(a_i) \otimes (b_i x)$ sont convergentes en norme, et comme u est une h-diagonale, leurs sommes respectives sont égales :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}(xa_i) \otimes b_i = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \otimes (b_i x)$$

D'après la proposition 4-1-1-4, on a alors :

$$\forall \phi \in A^* \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \phi(xa_i) b_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \phi(a_i) b_i x \quad (2)$$

Utilisant le lemme 4-1-3-5, par "forte independance" de $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$, on peut choisir des formes linéaires $\phi_j \in A^*,\ 1 \leqslant j \leqslant M$ telles que :

$$\|(\phi_j(a_1), \phi_j(a_2), \cdots) - e_j\|_2 < \epsilon \quad \forall\ 1 \leqslant j \leqslant M \quad (3)$$

où $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ désigne la base canonique de l_2. On a :

$$b_j x - \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_j(a_i) b_i x = \sum_{i=1}^{+\infty}(\delta_{ij} - \phi_j(a_i)) b_i x \quad \forall\ 1 \leqslant j \leqslant M$$

Utilisant un argument similaire à celui du début de la proposition 4-1-1-4, on a :

$$\left\| b_j x - \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_j(a_i) b_i x \right\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\delta_{ij} - \phi_j(a_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} (b_i x)^* b_i x \right\|^{\frac{1}{2}}$$

Or

$$\|(\phi_j(a_1), \phi_j(a_2), \cdots) - e_j\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\delta_{ij} - \phi_j(a_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où utilisant (3) et la définition de k, on a pour tout entier $j = 1, \cdots, M$:

$$\left\| b_j x - \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_j(a_i) b_i x \right\| \leqslant \epsilon \|x\| \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^* b_i \right\|^{\frac{1}{2}} \leqslant \epsilon k \|x\| \quad (4)$$

D'autre part,

$$\left\| \sum_{i=n}^{+\infty} \phi_j(xa_i) b_i \right\| \leqslant \|\phi_j\| \left\| \sum_{i=n}^{+\infty} xa_i (xa_i)^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=n}^{+\infty} b_i^* b_i \right\|^{\frac{1}{2}}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=n}^{+\infty} \phi_j(xa_i) b_i \right\| &\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant M} \|\phi_j\| \|x\| \left\| \sum_{i=n}^{+\infty} a_i a_i^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^* b_i \right\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant k \max_{1 \leqslant j \leqslant M} \|\phi_j\| \|x\| \left\| \sum_{i=n}^{+\infty} a_i a_i^* \right\|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| \sum\limits_{i=n}^{+\infty} a_i a_i^* \right\|^{\frac{1}{2}} = 0$, il existe un entier N tel que pour tout $j = 1, \cdots, M$

$$\left\| \sum_{i=N+1}^{+\infty} \phi_j(xa_i) b_i \right\|^{\frac{1}{2}} \leqslant \epsilon k \|x\|$$

D'où pour tout $j = 1, \cdots, M$:

$$\left\| b_j x - \sum_{i=1}^{N} \phi_j(a_i) b_i x \right\| \leqslant 2\epsilon k \|x\| \quad (5)$$

Par définition de k, $\|a_j\|^2 = \|a_j a_j^*\| \leqslant \left\| \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i a_i^* \right\| \leqslant k^2$. D'où :

$$\left\| \sum_{j=1}^{M} \left[a_j b_j x - \sum_{i=1}^{N} \phi_j(xa_i) a_j b_i \right] \right\| \leqslant 2\epsilon M k^2 \|x\|$$

Utilisant le fait que $\|c\| < 2$ et qu'on a une norme d'algèbre, il vient en composant à gauche par $c = \left(\sum\limits_{i=1}^{M} a_i b_i \right)^{-1}$ que pour tout $x \in A$:

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \phi_j(xa_i) c a_j b_i \right\| \leqslant 4\epsilon M k^2 \|x\| = \frac{\|x\|}{2} \quad (6)$$

Soit le sous-espace de dimension finie défini par :

$$B = < \{ c a_j b_i ;\ 1 \leqslant j \leqslant M \ ;\ 1 \leqslant i \leqslant N \} >$$

L'inégalité (6) assure que l'application canonique $\pi : A \longrightarrow A/B$ a une norme inférieure à $\frac{1}{2}$. D'où nécessairement $A = B$. Donc A est de dimension finie. $\square$

Corollaire 4-2-2 : Soit A une algèbre d'opérateurs. S'il existe une diagonale pour $A\hat{\otimes}A$, alors A est de dimension finie.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que l'on peut définir une notion de diagonale sur le produit tensoriel projectif de A par lui-même de même manière que l'on a défini une notion de diagonale pour le produit tensoriel de Haagerup de A par lui-même.
D'après la proposition 1-3-5, on sait que $\|\cdot\|_h \leqslant \|\cdot\|_\wedge$. Ainsi, l'application identité de $(A\otimes A, \|\cdot\|_\wedge)$ sur $(A\otimes A, \|\cdot\|_h)$ s'étend en une application $\hat{I}$ contractante (donc injective) de $A\hat{\otimes}A$ sur $A\otimes_h A$. On vérifie que si u est une diagonale de $A\hat{\otimes}A$, alors $\hat{I}(u)$ est une h-diagonale. Le résultat découle alors du théorème précédent.