LOI BINOMIALE

Épreuve de Bernoulli

On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire qui n'a que 2 issues possibles. L'une est appelée « succès » et l'autre « échec ».

Exemples :

1. On lance une pièce biaisée. La probabilité de faire pile est égale à $\frac{1}{4}$; celle de faire face est égale à $\frac{3}{4}$. On décide d'appeler succès l'événement S : « obtenir pile ». Comme il n'y a que 2 issues possibles : « pile » et « face », cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli. On a $p(S) = \frac{1}{4}$ *et* $p(\overline{S}) = \frac{3}{4}$.

2. On lance un dé parfait à 6 faces et on s'intéresse à l'obtention du nombre 5. Bien qu'il y ait a priori 6 issues possibles à cette expérience, on peut considérer comme univers $\Omega = \{S ; \overline{S}\}$, où S désigne l'événement « obtenir 5 ». On a $p(S) = \frac{1}{6}$ *et* $p(\overline{S}) = \frac{5}{6}$.

Loi binomiale

Introduction

On lance trois fois de suite une pièce biaisée. La probabilité de faire pile est égale à $\frac{1}{4}$; celle de faire face est égale à $\frac{3}{4}$.

1. Traduire cette expérience par un arbre de probabilités.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

   - Combien de valeurs peut prendre X ?

- Donner la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

On lance maintenant 6 fois de suite cette pièce. Au vu du nombre d'issues possibles de cette expérience : , il semble déraisonnable de construire l'arbre de probabilités en entier.
On désigne toujours par X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

- Quelle est la probabilité d'obtenir pile au premier lancer et pile au dernier lancer ?

- Quelle est la probabilité d'obtenir pile au second et troisième lancer ?

- Plus généralement, calculez la probabilité d'une branche de l'arbre qui contient exactement 2 piles ?

- Combien existe-t-il de branches contenant exactement 2 fois pile ?

- En déduire $p(X = 2)$.

- Exprimer $p(X = k)$ pour k entier compris entre 0 et 6.

SYNTHESE :

L'épreuve aléatoire consistant à lancer une pièce a <u>2 issues possibles</u> : « pile » ou « face », chacun de ces événements ayant une probabilité non nulle.
Les lancers sont <u>indépendants</u> les uns des autres.
On a <u>répété</u> cette même épreuve 6 fois de suite.

Pour k entier compris entre 0 et 6, on a : $p(X = k) =$

Considérons une épreuve de Bernoulli. Notons p la probabilité de l'événement « succès ».
Un **schéma de Bernoulli** est la répétition, dans les mêmes conditions, d'une même épreuve de Bernoulli ; ces épreuves étant indépendantes.

Exemples fondamentaux :

- Lancer plusieurs fois un dé ou une pièce.
- Les tirages successifs, et avec remise dans une urne.
- Un seul lancer simultané de n pièces (ou de n dés).

Exercice résolu : Une urne contient 8 boules vertes et 12 boules rouges. On tire *successivement* et *avec remise* 5 boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X.

Appelons à chaque tirage succès l'événement « tirer une boule verte ».

- On tire 5 fois de suite une boule de l'urne.
- La probabilité du succès est de $\frac{8}{20}$ à chaque tirage.
- Les 5 tirages sont indépendants.

X peut prendre les valeurs : 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X=x_i)$	$\left(\frac{12}{20}\right)^5$	$\binom{5}{1}\frac{8}{20}\left(\frac{12}{20}\right)^4$	$\binom{5}{2}\left(\frac{8}{20}\right)^2\left(\frac{12}{20}\right)^3$	$\binom{5}{3}\left(\frac{8}{20}\right)^3\left(\frac{12}{20}\right)^2$	$\binom{5}{4}\left(\frac{8}{20}\right)^4\frac{12}{20}$	$\left(\frac{8}{20}\right)^5$

On dit que X suit une **loi binomiale** **de paramètres 5 et** $\frac{8}{20}$**.**

Cas général :

- On répète n fois une épreuve.
- Les épreuves sont indépendantes.
- A chaque épreuve, on a soit un succès avec une probabilité p, soit un échec avec une probabilité 1-p. ($0 < p < 1$)

Définition : On dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p (n entier et $p \in]0;1[$) si :

- L'ensemble des valeurs que peut prendre X est $\{0;1;2...;n\}$
- Pour tout entier k compris entre 0 et n, $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

On a $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$.

Exercice 1

On jette un dé 7 fois consécutivement. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de 4 obtenus.

1. Justifier que la loi de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En déduire $p(X = 5)$; $p(X \leq 2)$.
3. Calculer $E(X), V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Répondre aux questions précédentes si l'on suppose que l'on jette 7 dés distincts.

Exercice 2

Une machine produit des pièces défectueuses avec la probabilité de 0,02. On prélève au hasard, successivement et avec remise, 9 pièces de la fabrication. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses.

1. Justifier que la loi de Y est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $p(Y > 2)$.

Exercice 3

Un jardinier sème dix graines d'une même plante exotique dans des conditions identiques. La probabilité de germination de chaque graine de cette plante est 0,3. Les germinations sont supposées indépendantes. On note X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de graines qui germent parmi les dix semées.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que cinq graines exactement germent.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une germination.

Exercice 4

La probabilité qu'un tireur atteigne une cible est de 1/3.

1. Sur 5 tirs indépendants les uns des autres, quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible au moins deux fois ?
2. Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité d'atteindre au moins une fois la cible soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 5

Dans une usine, on estime que la probabilité de fabriquer un objet défectueux est de 0,01. Les objets sont fabriqués de façon indépendante et sont regroupés par paquets de dix. Le fabricant s'engage à rembourser les paquets contenant au moins deux objets défectueux.
Quelle est la proportion de paquets susceptibles d'être remboursés ?