LIMITE D'UNE SUITE (JE SAIS FAIRE)

Généralités sur les suites réelles

♣ Je sais écrire la définition d'une suite majorée / minorée / bornée. Je sais qu'un majorant / minorant ne doit pas dépendre de la variable *n*.

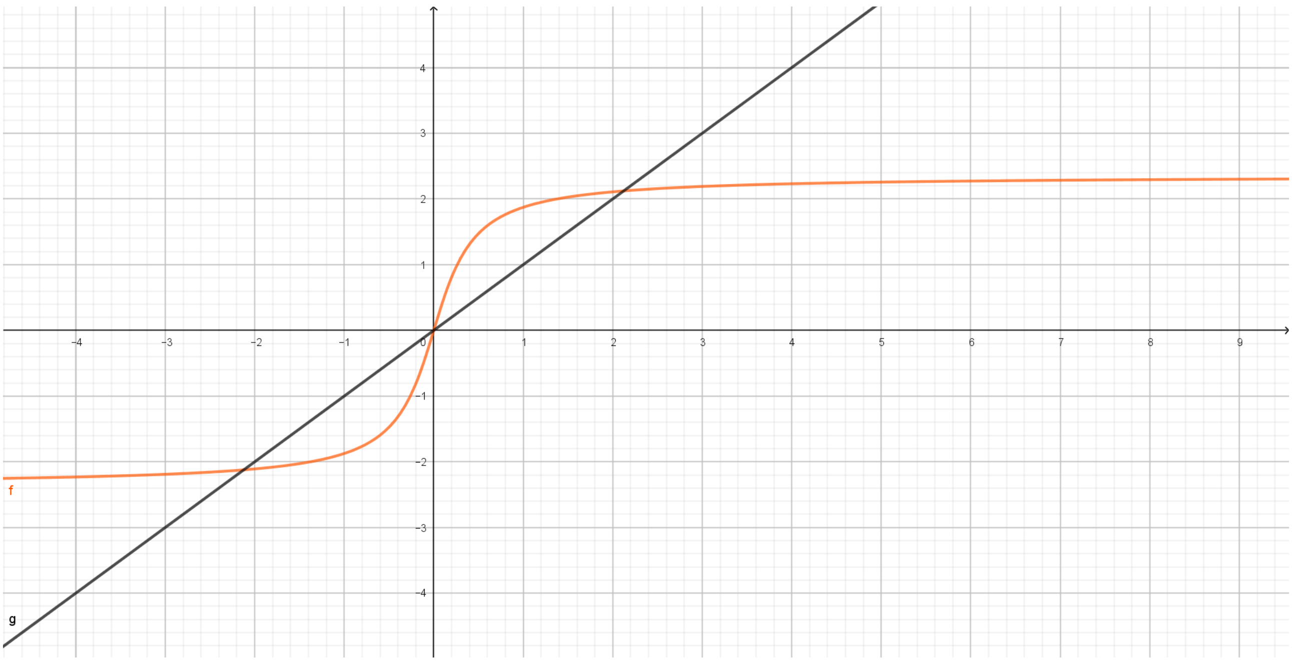
♣ Je sais écrire la définition d'une suite (strictement) croissante / décroissante.

1. Prouver de deux manières que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2\times 3^{5n+2}$ est strictement croissante.

2. Écrire précisément la proposition « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 5 à partir du rang N » et savoir se représenter graphiquement ceci.

♣ Je sais que pour une suite récurrente $u_{n+1}=f(u_n)$: f croissante / décroissante n'implique PAS que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante / décroissante.

3. On note f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ représentée ci-dessous. Étudier rapidement de tête, en fonction de $u_0\in\mathbb{R}$, la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_{n+1}=f(u_n)$.



Limite d'une suite réelle dans $\overline{\mathbb{R}}$

♣ Je sais écrire les trois définitions de la limite d'une suite : cas où la limite est un réel l ; cas où la limite est $+\infty$ ou $-\infty$.

♣ Je connais des exemples-type de suites ayant pour limite 0 et $+\infty$. Je connais quelques exemples de suites n'ayant pas de limite et je comprends pourquoi.

♣ Je sais calculer des sommes, des produits et des quotients de limites et je maîtrise parfaitement les formes indéterminées : les repérer et lever l'indétermination. Je sais notamment mettre en facteur le terme dominant d'un numérateur ou d'un dénominateur pour calculer une limite.

4. Donner un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles : $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=-\infty$, mais pour lesquelles $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n=7$. Même question en remplaçant « 7 » par « $+\infty$ », puis par « 0 ».

5. Calculer la limite des suites de terme général : $u_n=n^2-3n+1$; $v_n=\dfrac{6n-7}{3n+4}$; $w_n=\dfrac{10n^2+15n-1}{3n^3+2}$; $t_n=3^n-2^n$; $z_n=0{,}5^n-0{,}01n^2+10n$; $s_n=\dfrac{e^{-n}+1}{e^{-2n}-4}$.

Théorèmes d'existence de limites

♣ Je connais les théorèmes de comparaison de limites et je sais les appliquer dans des cas simples.

♣ Je connais le théorème d'encadrement. Je sais qu'il s'agit d'un théorème **d'existence** de limite et ne le confonds pas avec un simple passage à la limite dans lequel on sait toujours déjà que les limites existent.

6. a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{2n+\cos n}{3n+1}$ converge, et préciser sa limite.
   b) VRAI OU FAUX ? Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l' , alors $l\leq l'$.
   c) VRAI OU FAUX ? Toute suite non majorée a pour limite $+\infty$.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_{n+1}=0{,}5u_n+12$. Quelle est la seule valeur l candidate pour être la limite de u ? Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-l$ est une suite géométrique dont vous préciserez la limite. En déduire que u converge vers l.

♣ Je sais calculer la limite d'une suite géométrique en distinguant les cas qui s'imposent. Je connais l'expression de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

8. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $x \in \mathbb{R}$, la limite $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} x^{2k}$ est-elle finie ? Que vaut-elle alors ?

♣ Je sais que le théorème de la limite monotone (version croissante ou décroissante) est d'abord un théorème d'existence. Je sais en outre qu'une suite croissante et majorée n'a aucune raison de converger vers le majorant que j'ai trouvé.

9. Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.