PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le **produit scalaire** du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ est le **nombre réel** défini par $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2]$.

Remarques :

1. Cette expression est assez peu utilisée dans la pratique. Dans la plupart des cas on lui préférera une des expressions données au paragraphe suivant.
2. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors on a $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Réciproque fausse.

Autres expressions du produit scalaire

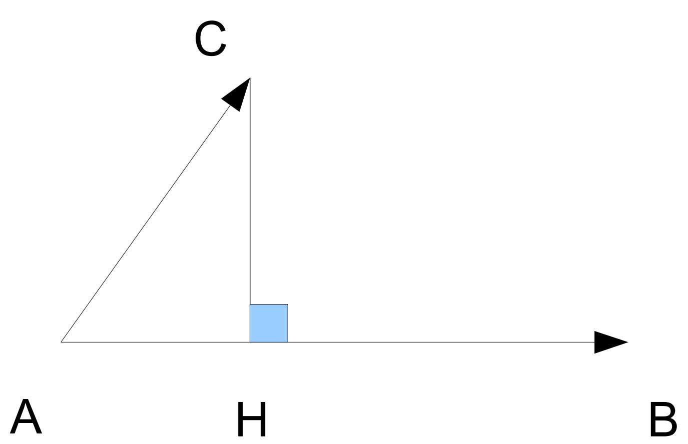
Expression 1 : Si dans un repère orthonormé, on a $\vec{u}(x \ ; \ y)$ et $\vec{v}(x' \ ; \ y')$, alors on a $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$.

Expression 2 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors on a
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\theta)$ où θ est une mesure de l'angle $(\vec{u} \ ; \ \vec{v})$.

Remarques :

1. Cette expression est très utile en pratique, notamment si l'on dispose de deux vecteurs de même origine.
2. On dispose en particulier des deux résultats suivants qui se déduisent immédiatement de l'expression précédente :
   a) $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et **de même sens**.
   b) $\vec{u}.\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et **de sens contraires**.

Expression 3 : Le résultat qui suit a le mérite de se ramener aux deux cas précédents. Il est très pratique dans la mesure où l'on sait calculer la norme de certains vecteurs colinéaires.



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors on a :

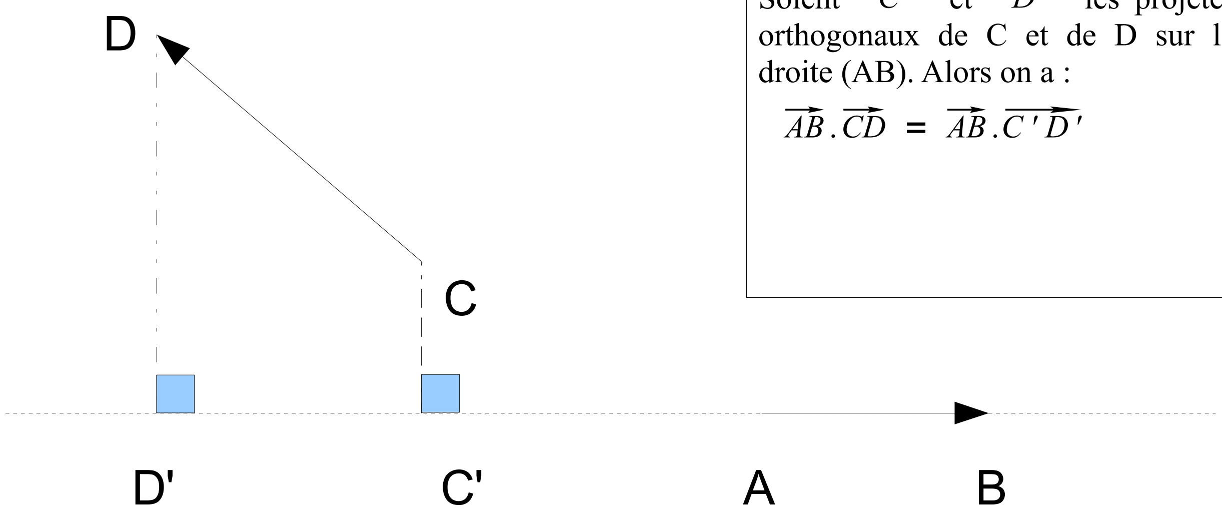
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Remarques : En utilisant cette expression, on se ramène au cas de trois points alignés. On peut alors utiliser les résultats vus à la remarque précédente au 2) a) et au 2) b). On en déduit également le résultat suivant très utile pour prouver l'orthogonalité de deux vecteurs.

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$. On en déduit que deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Expression 3 bis : Autre conséquence immédiate de l'expression 3 et qui permet également de considérer des points alignés, donc des vecteurs colinéaires portés par la même droite (graduée dans la pratique) :

> Soient C' et D' les projetés orthogonaux de C et de D sur la droite (AB). Alors on a :
>
> $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$



Règles de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous réels a et b on a :

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
2. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
3. $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab)(\vec{u}.\vec{v})$

Notation et remarque : On note souvent $\vec{u}^2$ pour $\vec{u}.\vec{u}$. Remarquons que l'on a alors : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Applications du produit scalaire

Vecteur normal d'une droite

Définition : Un **vecteur normal** d'une droite D est un vecteur $\vec{n}$ *non nul* et orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.

Propriétés :

1. Soit D une droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$. Alors le point M appartient à la droite D si et seulement $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
2. Soit D une droite d'équation $ax+by+c = 0$ dans un repère orthonormal. Un vecteur normal de D est $\vec{n}(a \; ; \; b)$.

Exercice : Si l'équation de D est donnée sous la forme $y = mx+p$, en déterminer un vecteur normal.

Équation d'un cercle

Propriété : Soient A et B deux points distincts du plan. Un point M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

En calculant l'expression précédente, on a une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c = 0$.