Feuille d'exercices

Prof : Yannick Le Bastard Classe : Terminale spé maths Année : 2023-2024

Rappels de cours : Les quantificateurs existentiels $\exists$ et universels $\forall$ ne sont pas de simples abréviations mathématiques. Il vous appartient de bien comprendre leur portée, et au niveau du bacccalauréat, et même au-delà, de rédiger chaque "phrase mathématique" uniquement en français en explicitant parfaitement l'ordre des propositions mises en jeu.
Par exemple, il est totalement illicite (sauf exception) d'intervertir les quantificateurs lorsqu'il ne sont pas du même type :

1. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\exists N \in \mathbb{N})$, $N > n$ se traduit par : pour tout entier naturel n, il existe (au moins) un entier naturel N tel que N soit strictement supérieur à n.
   En effet, tous les entiers N supérieurs ou égaux à $n + 1$ conviennent. Cette proposition est donc toujours vraie : c'est une tautologie.

2. $(\exists n \in \mathbb{N})$ $(\forall N \in \mathbb{N})$, $N \leq n$ se traduit par : il existe (au moins) un entier naturel n, tel que pour tout entier naturel N : N est inférieur ou égal à n.
   Cette proposition, contraire de la précédente (et donc toujours fausse), signifie qu'il existe un entier naturel n plus grand que tous les autres. Ce qui est totalement faux !

Exercice n°1

Traduction français-mathématiques.

1. Écrivez les phrases suivantes avec des quantificateurs et dire si elles sont vraies ou fausses :
   - Il existe au moins un entier naturel supérieur ou égal à 5.
   - Il existe au moins un entier relatif strictement compris entre 3 et 4.
   - Tout entier naturel est positif ou nul.
   - Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tout élément de $\mathbb{R}$ possède au moins un antécédent par f.
   - Tout élément de l'ensemble A est dans l'ensemble B.
2. Niez les propositions précédentes en français et avec des quantificateurs.

Exercice n°2

Dîtes si les propositions qui suivent sont vraies ou fausses. Donnez en cas de valeur fausse un contre-exemple.

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}_+,\ y = x^2$
2. $\forall y \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = x^2$
3. $\forall y \in \mathbb{R}_+\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2$
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R},\ y + x = 0$
5. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ , x = y + 1$
6. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{Z},\ x = y + 1$
7. $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N},\ x = y + 1$
8. $\forall x \in \mathbb{N}^*\ \exists y \in \mathbb{N}\ , x = y + 1$

Rappels de cours : On rappelle que si P et Q désignent deux propositions mathématiques, l'implication $\underline{P \implies Q}$ signifie $\underline{\neg P \vee Q}$. Sa table de vérité est :

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On remarque en particulier que dire : $P \implies Q$ est vraie ne donne aucune information sur la véracité de P ni de Q. L'implication n'est PAS synonyme de "donc", pas du tout ! Encore plus choquant : Si l'on part d'une hypothèse fausse P, alors l'implication $P \implies Q$ est toujours vraie !
Remarquons aussi que les propositions $(P \implies Q)$ et $(\neg Q \implies \neg P)$ ont même table de vérité. La seconde est appelée la *contraposée* de la première.

Pour prouver une implication $P \implies Q$, on dispose essentiellemnt de trois méthodes :

1. **La preuve directe** : On suppose P vraie, et par une succession d'arguments mathématiques, on arrive à la conclusion que Q est vraie.
2. **La preuve par contraposition** : On suppose Q fausse, et par une succession d'arguments mathématiques, on arrive à la conclusion que P est fausse.
3. **Le raisonnement par l'absurde** : On suppose P vraie **et** Q fausse, et par une succession d'arguments mathématiques, on arrive à une contradiction.

Terminons par quelques définitions à connaître par cœur :
Considérons deux propositions mathématiques P et Q et l'implication $P \implies Q$.

1. Q est une *condition nécessaire* pour P : *il faut que* Q soit vraie pour que P le soit aussi.
2. P est une *condition suffisante* pour Q : *il suffit que* P soit vraie pour que Q le soit aussi.
3. P et Q sont *équivalentes* si et seulement si $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$. On écrit $P \iff Q$.

Exercice n°3

Écrivez la réciproque et la contraposée des propositions suivantes et dîtes si elles sont vraies ou fausses :

1. Si Socrate est un homme, alors Socrate est mortel,
2. Si Miaouss est un félin, alors Miaouss est un tigre ou un chat.
3. Si Paul et Léa vont au cinéma, alors ils vont regarder un film.

Exercice n°4

Démontrez par l'absurde les propositions suivantes :

1. La diagonale d'un rectangle de largeur 1 et de longueur 2 a une mesure irrationnelle.
2. Prouvez que lorsqu'un réel peut s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, les entiers a et b sont nécessairement uniques.
3. Soit a et n des entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $M = a^n - 1$ est un nombre premier. Prouvez que $a = 2$ puis que n est premier (on rappelle qu'un entier naturel n est premier si $n \geq 2$ et si n n'a d'autres diviseurs positifs que 1 et lui-même).

Le raisonnement par récurrence

Rappels de cours : Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On souhaite prouver que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n à partir de $n = n_0$ (souvent ce sera $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$). On procède en deux étapes :

1. **Initialisation** : On prouve que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : On fixe un entier naturel n quelconque supérieur ou égal à n_0 et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On prouve alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3. **Conclusion** : Pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Je ne saurai trop insister sur la parfaite rédaction d'une preuve par récurrence. Chaque étape doit être mise en œuvre avec le plus grand soin !

Exercice n°5

Exemples incontournables à rédiger parfaitement !

1. Prouvez que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier naturel n : $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
2. Prouvez que pour tout entier naturel $n \neq 3$: $n^2 \leq 2^n$.
3. Prouvez que pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Prouvez que pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice n°6

Où l'on retrouve les fonctions dérivées.
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

1. Après avoir justifié que f est dérivable sur $D = \mathbb{R}^*$, calculez $f'(x)$. On notera désormais $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur D si elle existe.
2. Prouvez que pour tout entier naturel n : $f^{(n)}$ existe sur D et que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
   On rappelle que si u est une fonction dérivable sur un ensemble D et qui ne s'annule pas sur D, alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur D, et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}$.

Exercice n°7

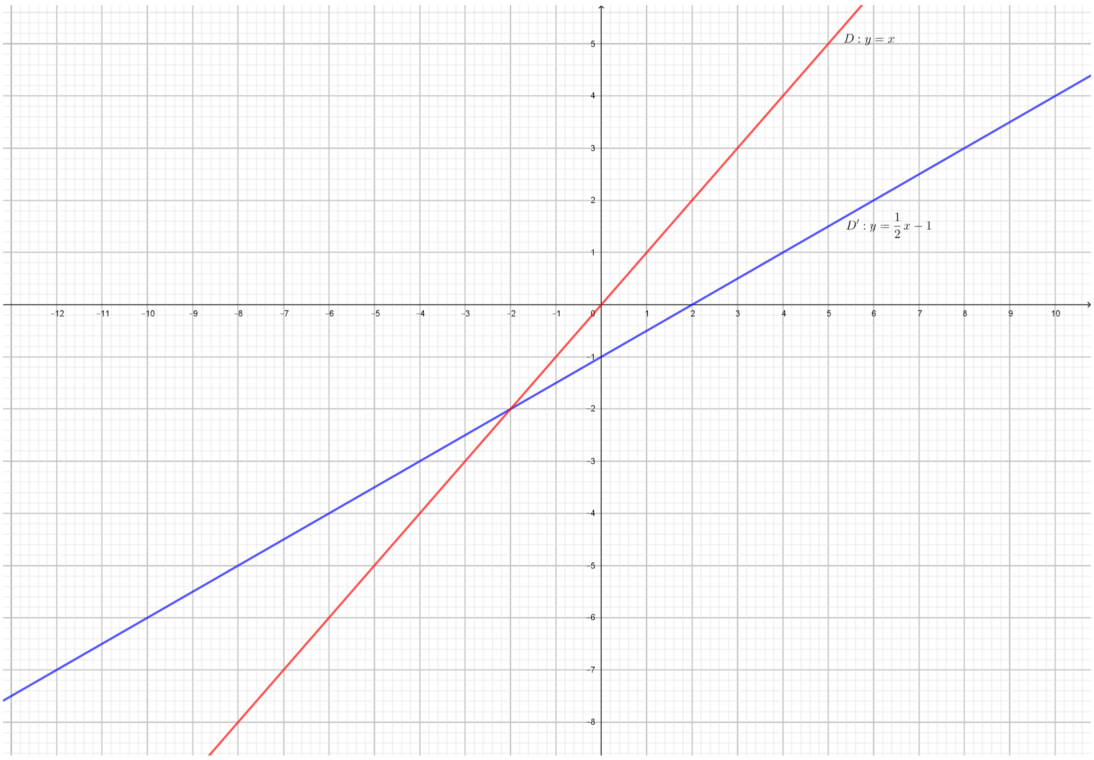
Enquête, conjectures, preuve par récurrence.
En calculant les premiers termes des suites ci-dessous, conjecturez une expression explicite de u_n en fonction de n et prouvez rigoureusement ceci par récurrence.

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - u_n$.
2. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.
3. $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+4)u_n$.

Exercice n°8

Soit la suite (u_n) définie par u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1$.

On donne ci-dessous la représentation graphique de la droite D d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ et la droite d'équation $y = x$.



Dessinez sur l'axe des abscisses les termes u_0 à u_4 de la suite (u_n) dans le cas où $u_0 = -8$ (les termes seront notées en rouge).

1. Quel semble être le sens de variation de (u_n) ?

2. Vers quelle valeur ℓ semblent tendre les termes u_n ?

3. Prouvez par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n \leq u_{n+1} \leq -2$.

4. On admet le théorème fondamental suivant : **toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge**. Justifiez que la suite (u_n) précédente converge.

5. On admet le théorème suivant (qui permet de trouver la limite éventuelle d'une suite définie par récurrence) : Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, où I est un intervalle fermé et si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f dérivable sur I, alors si (u_n) converge, sa limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.
   Calculez la seule limite éventuelle ℓ de (u_n) et justifiez que (u_n) converge vers ℓ.

6. Nous allons démontrer un peu plus directement ce résultat :

   - Prouvez que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} + 2 = \dfrac{1}{2}(u_n + 2)$
   - En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n + 2 = 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   - Conclure.

7. Étudiez la suite dans le cas où $u_0 = 10$ (les termes seront notés en bleu).