DATE
01 février 2024

EXAMEN
Contrôle Continu
MODULE
-
DURÉE DE L'ÉPREUVE
2h00

ANNÉE ET FILIÈRE	
Terminale	Spécialité mathématiques
COMPOSITION DE	
Mathématiques	
NOM DES ENSEIGNANTS	
Y. LE BASTARD	

DOCUMENTS AUTORISÉS

Calculatrice	PROGRAMMABLE	X	NON PROGRAMMABLE	☐	NON	☐
Autres documents	OUI	☐	NON	X		

Les exercices sont indépendants. *On portera une attention particulière à la rédaction.*

SUJET

Le devoir comporte 24 points, mais le total obtenu sera votre note sur 20. Toute note supérieure à 20 est ramenée à 20. Le soin est une qualité essentielle : aérez votre copie, soulignez ou encadrez proprement vos résultats.

Exercice n° 1. *10 points*

1) Question de cours : compléter les limites classiques suivantes sans justifier.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} =$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) =$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^k} = \qquad (k \geq 1)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} =$

2) Déterminer, en justifiant les limites suivantes. Préciser les asymptotes éventuelles.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 2\ln(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} - 1}{2x}$

3) Déterminer, en justifiant les limites suivantes. Préciser les asymptotes éventuelles.

a) Limite en 0 et en $\pm\infty$ de $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

b) Limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{-5x^2 + 2x + 1}{3x^2 + 5}$

c) Limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{3 - 2\cos(x)}{x}$

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Justifier brièvement que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

b) f est-elle continue en 0 ? en 1 ?

c) f est-elle dérivable en 0 ? en 1 ?

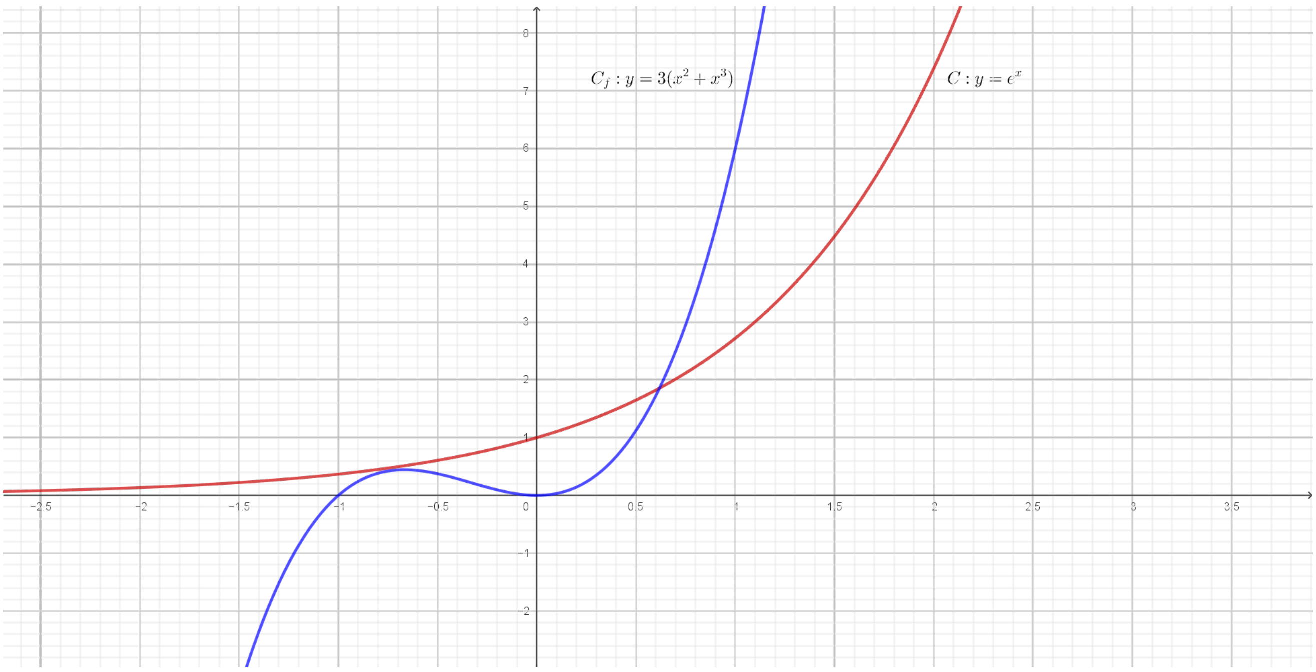
5) (plus difficile) Calculer $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{2}{x^2 - 4x + 3}$ (indication : commencer par factoriser les dénominateurs de chaque fraction).

Exercice n° 2. *10 points*

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $\mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



1) Á l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : Étude de la validité de la conjecture graphique

2)

1) a. Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.

c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2) On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1 + x) - x.$$

Montrer que, sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3) a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}.$$

b. Déterminer les variations de la fonction h.

c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

d. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Exercice n° 3. *4 points*

Cet exercice est **facultatif**.

Dans chacune des questions qui suivent, une seule bonne réponse est possible. Entourer la bonne réponse (aucune justification n'est demandée).

1) Soit f la fonction définie au voisinage de 0 par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-4x^2}-1}{2x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est continue en 0.
   a) VRAI b) FAUX
2) La fonction précédente est dérivable en 0.
   a) VRAI b) FAUX
3) L'équation $(E)\ :\ \ln((x-3)(x+4)) = 1$ est équivalente à l'équation $(E')\ :\ \ln(x-3)+\ln(x+4) = 1$.
   a) VRAI b) FAUX
4) (E) et (E') ont le même ensemble de solutions.
   a) VRAI b) FAUX

FIN DE L'EXAMEN