



DATE
20 novembre 2023

EXAMEN
Contrôle Continu
MODULE
-
DURÉE DE L'ÉPREUVE
1h30

ANNÉE ET FILIÈRE
Terminale Spécialité Maths
COMPOSITION DE
Mathématiques
NOM DES ENSEIGNANTS
Y. LE BASTARD

DOCUMENTS AUTORISÉS

Calculatrice	PROGRAMMABLE	<input checked="" type="checkbox"/>	NON PROGRAMMABLE	<input type="checkbox"/>	NON	<input type="checkbox"/>
Autres documents	OUI	<input checked="" type="checkbox"/>	NON	<input type="checkbox"/>		
Documents autorisés :	Fiche de synthèse sur les suites					

Les exercices sont indépendants.

On portera une attention particulière à la rédaction.

SUJET

Le devoir comporte 24 points, mais le total obtenu sera votre note sur 20. Toute note supérieure à 20 est ramenée à 20. Le soin est une qualité essentielle : aérez votre copie, surlignez ou encadrez proprement vos résultats.

Exercice n° 1.

12 points

Déterminez si elle existe la limite des suites dont le terme général est donné dans les questions 1 et 2. Justifiez précisément vos réponses.

1)

a) $u_n = \frac{-3n^2 + 2n - 7}{5n^2 + 2n + 1}$

b) $v_n = \frac{3n - 2 \cos n}{n + 1}$

c) $w_n = -n + 3 \sin n$

d) $t_n = e^{-\frac{\sin n}{n}}$

e) $z_n = \frac{1 + 2^n}{3 + 5^n}$

f) $r_0 = 1$ et $r_{n+1} = 2r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2)

a) $u_n = (-2)^n + 3$

b) $v_n = -2^n + 3$

c) $w_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k$

d) $t_n = \frac{\cos(2^n)}{n}$

e) $z_n = \frac{(n+1)3^n}{n2^n}$

f) $r_n = (-1, 2)^{2n} - 1, 3^n$

Exercice n° 2.

8 points

1) On rappelle que si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors $f = e^u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2,5 - 0,9e^{-1,2x}$.

b) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Prouvez par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2,5$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une valeur ℓ dont vous déterminerez une valeur approchée à 0,01 près à l'aide de votre calculatrice.

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 0,6u_n - 0,35$ et (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 0,875$.

a) Justifiez que (v_n) est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n .

c) Déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) On appelle suite de Sylvester la suite (s_n) définie par $s_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $s_{n+1} = 1 + s_0 \times s_1 \times \dots \times s_n$.

a) Prouvez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$.

b) Prouvez que $\forall n \in \mathbb{N}$, s_n est un entier et $s_n \geq n + 2$. Quelle est la limite de (s_n) ?

c) Simplifiez la différence $\frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1}$

d) En déduire la limite de la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{s_k}$ (pensez aux simplifications télescopiques).

Exercice n° 3.

4 points

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n -ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geq 1, \quad u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1)

a) Calculez u_2 et u_3 et proposez une interprétation dans le contexte de l'exercice.

b) Montrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

c) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

2)

On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python. Déterminez la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(8.5)` et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :  
    n=1  
    u=3  
    while u<=p :  
        n=n+1  
        u=0.9*u+1.3  
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19 \times (n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n -ième mois sur la FAQ.

3)

- a) Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2 .
- b) Déterminer à l'aide de votre calculatrice la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles (facultatif)

4)

- a) L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.
Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?
Justifiez votre réponse.
- b) En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

FIN DE L'EXAMEN