Rudiments de logique

premières notions

Terminale spécialité maths / L1

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

November 26, 2023

Les sentiers mathématiques : seconde randonnée

Quelques conseils essentiels

Vous entrez en Terminale *spécialité mathématiques*, et de ce fait, avez déjà manipulé des formules, résolu des équations, émis et/ou vérifié des hypothèses avant de répondre à une question. Mais l'avez-vous fait dans les règles de l'art ? C'est à dire honnêtement, sans bavures, de manière explicite, bref : **RIGOUREUSEMENT**.

Comme tout langage, les mathématiques possèdent leur vocabulaire propre, leur grammaire. Vous **rédigerez** essentiellement en français vos *propositions mathématiques*, mais apprendrez aussi à les traduire à l'aide de symboles spécifiques qu'il faudra vous approprier en profondeur.

Quelques conseils essentiels

Vous entrez en Terminale *spécialité mathématiques*, et de ce fait, avez déjà manipulé des formules, résolu des équations, émis et/ou vérifié des hypothèses avant de répondre à une question. Mais l'avez-vous fait dans les règles de l'art ? C'est à dire honnêtement, sans bavures, de manière explicite, bref : **RIGOUREUSEMENT**.

Comme tout langage, les mathématiques possèdent leur vocabulaire propre, leur grammaire. Vous **rédigerez** essentiellement en français vos *propositions mathématiques*, mais apprendrez aussi à les traduire à l'aide de symboles spécifiques qu'il faudra vous approprier en profondeur.

Votre objectif

Pour résumer : maîtrisez-vous ! Chaque mot ou symbole vous engagent. Vous ne pouvez pas impunément intervertir des phrases ou des symboles sans d'éventuelles conséquences ! Votre réussite future en mathématiques dépendra en grande partie de votre capacité à intérioriser le contenu qui va suivre et à en faire des réflexes.

Propositions et connecteurs logiques

La *logique propositionnelle* est l'étude des formules abstraites qu'on peut écrire à partir d'un certain nombre de variables propositionnelles, représentées par des lettres. Nous nous contentons d'une définition restant assez vague, l'objet n'étant pas l'étude de la logique formelle, mais une bonne structuration de la pensée et de la démarche scientifique.

Constantes, variables et propositions

1. Une **constante** est un signe ayant une valeur précise et immuable ; par exemple 1, 2, π, une personne en particulier.

Propositions et connecteurs logiques

La *logique propositionnelle* est l'étude des formules abstraites qu'on peut écrire à partir d'un certain nombre de variables propositionnelles, représentées par des lettres. Nous nous contentons d'une définition restant assez vague, l'objet n'étant pas l'étude de la logique formelle, mais une bonne structuration de la pensée et de la démarche scientifique.

Constantes, variables et propositions

1. Une **constante** est un signe ayant une valeur précise et immuable ; par exemple 1, 2, π, une personne en particulier.
2. Une **variable** est un signe pouvant prendre différentes valeurs dans un certain ensemble ou n'ayant pas de valeur prédéfinie ; par exemple : x solution de $x^2 = 5$, une personne prise au hasard dans le lycée.

Propositions et connecteurs logiques

La *logique propositionnelle* est l'étude des formules abstraites qu'on peut écrire à partir d'un certain nombre de variables propositionnelles, représentées par des lettres. Nous nous contentons d'une définition restant assez vague, l'objet n'étant pas l'étude de la logique formelle, mais une bonne structuration de la pensée et de la démarche scientifique.

Constantes, variables et propositions

1. Une **constante** est un signe ayant une valeur précise et immuable ; par exemple 1, 2, π, une personne en particulier.
2. Une **variable** est un signe pouvant prendre différentes valeurs dans un certain ensemble ou n'ayant pas de valeur prédéfinie ; par exemple : x solution de $x^2 = 5$, une personne prise au hasard dans le lycée.
3. Une **proposition** est une phrase $\mathcal{P}$ pour laquelle on peut décider si son contenu est réalisé ou non ; par exemple "3 est un entier" est une proposition, mais "Donne-moi l'heure" n'en n'est pas une.

Propositions et connecteurs logiques

Les connecteurs logiques sont des mots ou symboles permettant, à partir de propositions existantes, de définir de nouvelles propositions.

Connecteurs logiques et tables de vérité

On distingue trois connecteurs logiques fondamentaux à partir desquels on peut définir d'autres connecteurs plus complexes.

1. La **négation**, notée symboliquement $\neg$: la proposition $\neg P$ est vraie si la proposition P est fausse, et la proposition P est vraie si la proposition $\neg P$ est fausse. On résume ceci dans une table de vérité :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Table: Table de vérité du connecteur $\neg$

Remarquons que $\neg(\neg P)$ et P sont simultanément vraies ou fausses.

Propositions et connecteurs logiques

Connecteurs logiques et tables de vérité

Le second et troisièmes connecteurs logiques sont :

2. la **conjonction** "et", notée $\wedge$,
3. la **disjonction inclusive** "ou", notée $\vee$

Leurs tables de vérité sont données ci-dessous :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table: Tables de vérité des connecteurs $\wedge$ et $\vee$

Connecteurs logiques et tables de vérité

Le second et troisièmes connecteurs logiques sont :

2. la **conjonction** "et", notée $\wedge$,
3. la **disjonction inclusive** "ou", notée $\vee$

Leurs tables de vérité sont données ci-dessous :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table: Tables de vérité des connecteurs $\wedge$ et $\vee$

Principe de non contradiction : Aucune proposition n'est à la fois vraie et fausse.

Propositions et connecteurs logiques

Exemple 1

Soient P et Q deux propositions. Donnez les tables de vérité des propositions :

1. $\neg(P \vee Q)$ et $\neg P \wedge \neg Q$
2. $\neg(P \wedge Q)$ et $\neg P \vee \neg Q$
3. $\neg P \vee Q$ et $P \wedge \neg Q$
4. $P \vee \neg Q$ et $\neg P \wedge Q$

Exemple 2

Donnez la négation des propositions suivantes :

1. P : "$x \geq 1$" et Q : "$-1 < x \leq 5$"
2. P : "Tous les étudiants ont la moyenne à l'examen"

Propositions et connecteurs logiques

Nous ne corrigeons que la question 1 de l'exemple 1 ainsi que l'exemple 2.

Correction partielle des exemples

1. Exemple 1 question 1 :

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2. Exemple 2 :
   - question 1 a) : la négation de "$x \geq 1$" est : "$x < 1$".
   - question 1 b) : la négation de "$-1 < x \leq 5$"est : "$(x \leq -1) \ \vee \ (x > 5)$".
   - question 2 : la négation de "Tous les étudiants ont la moyenne à l'examen" est : "Il existe (au moins) un étudiant qui n'a pas la moyenne à l'examen".

Propositions et connecteurs logiques

Au cours de votre scolarité, vous avez souvent été amené(e)s à démontrer des **implications** : *si une certaine proposition P est vraie, alors ceci entraine qu'une autre proposition Q est vraie aussi*.

Par exemple, P : "n est un entier pair" implique Q : "n^2 est un entier pair". Si P est vraie, alors Q l'est aussi. C'est la véracité de Q que l'on vise à prouver !

Propositions et connecteurs logiques

Au cours de votre scolarité, vous avez souvent été amené(e)s à démontrer des **implications** : *si une certaine proposition P est vraie, alors ceci entraine qu'une autre proposition Q est vraie aussi*.

Par exemple, P : "n est un entier pair" implique Q : "n^2 est un entier pair". Si P est vraie, alors Q l'est aussi. C'est la véracité de Q que l'on vise à prouver !

Dans le cas présent, la **réciproque**, que nous définirons précisément plus tard, est vraie aussi : Si Q est vraie, alors P l'est aussi. Nous dirons que les propositions P et Q sont **équivalentes**. Elles sont simultanément vraies ou fausses : leur table de vérité est identique.

Propositions et connecteurs logiques

Au cours de votre scolarité, vous avez souvent été amené(e)s à démontrer des **implications** : *si une certaine proposition P est vraie, alors ceci entraine qu'une autre proposition Q est vraie aussi*.

Par exemple, P : "n est un entier pair" implique Q : "n^2 est un entier pair". Si P est vraie, alors Q l'est aussi. C'est la véracité de Q que l'on vise à prouver !

Dans le cas présent, la **réciproque**, que nous définirons précisément plus tard, est vraie aussi : Si Q est vraie, alors P l'est aussi. Nous dirons que les propositions P et Q sont **équivalentes**. Elles sont simultanément vraies ou fausses : leur table de vérité est identique.

Nous allons définir précisément ce que signifie "P implique Q", que nous noterons $P \implies Q$, et en déduirons deux modes de raisonnement utilisés très fréquemment en mathématiques :

- Le **raisonnement par l'absurde**,
- Le **raisonnement par contraposée**.

Paradoxalement, il est plus simple de comprendre la proposition $P \implies Q$ en commençant par définir sa négation : $\neg(P \implies Q)$. Je vais donc reprendre ce slogan bien connu de la FDJ : " *Tous les gagnants ont tenté leur chance*" , assorti bien évidemment et hypocritement d'un message de prévention sur l'addiction aux jeux !

Propositions et connecteurs logiques

Paradoxalement, il est plus simple de comprendre la proposition $P \implies Q$ en commençant par définir sa négation : $\neg(P \implies Q)$. Je vais donc reprendre ce slogan bien connu de la FDJ : " *Tous les gagnants ont tenté leur chance*", assorti bien évidemment et hypocritement d'un message de prévention sur l'addiction aux jeux !

Définissons les propositions P : "J'ai joué" et Q : "J'ai gagné". Avoir tenté sa chance, c'est bien avoir joué ... Seulement, le fait d'avoir joué n'implique pas nécessairement de gagner.

Propositions et connecteurs logiques

Paradoxalement, il est plus simple de comprendre la proposition $P \implies Q$ en commençant par définir sa négation : $\neg(P \implies Q)$. Je vais donc reprendre ce slogan bien connu de la FDJ : " *Tous les gagnants ont tenté leur chance*", assorti bien évidemment et hypocritement d'un message de prévention sur l'addiction aux jeux !

Définissons les propositions P : "J'ai joué" et Q : "J'ai gagné". Avoir tenté sa chance, c'est bien avoir joué . . . Seulement, le fait d'avoir joué n'implique pas nécessairement de gagner.

On peut donc **nier** le fait que "**jouer implique gagner**" par : "j'ai joué **et** j'ai perdu", soit : $\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}$. Or $\neg(P \wedge \neg Q) \equiv \neg P \vee Q$, d'où la :

Propositions et connecteurs logiques

Paradoxalement, il est plus simple de comprendre la proposition $P \implies Q$ en commençant par définir sa négation : $\neg(P \implies Q)$. Je vais donc reprendre ce slogan bien connu de la FDJ : " *Tous les gagnants ont tenté leur chance*", assorti bien évidemment et hypocritement d'un message de prévention sur l'addiction aux jeux !

Définissons les propositions P : "J'ai joué" et Q : "J'ai gagné". Avoir tenté sa chance, c'est bien avoir joué ... Seulement, le fait d'avoir joué n'implique pas nécessairement de gagner.

On peut donc **nier** le fait que "**jouer implique gagner**" par : "j'ai joué **et** j'ai perdu", soit : P $\wedge \neg$Q. Or $\neg(P \wedge \neg Q) \equiv \neg P \vee Q$, d'où la :

Définition de l'implication

Soient P et Q deux propositions. La proposition P **implique** Q, que l'on note par $\boxed{P \implies Q}$ est exactement la proposition $\boxed{\neg P \vee Q}$.

Propositions et connecteurs logiques

Donnons la table de vérité de $P \implies Q$ et de sa négation.

P	Q	$P \implies Q$	$\neg(P \implies Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Remarques importantes

1. Si P est fausse, la proposition $P \implies Q$ est toujours vraie.
2. En particulier, la flèche $\implies$ n'est pas synonyme de "donc", qui sous-entend que ce qui précède est vrai.
3. **Pour prouver que $P \implies Q$ est vraie, on supposera donc P vraie, puis on aboutira à la conclusion que Q est vraie.**

Propositions et connecteurs logiques

Résumé

Retenez donc bien que l'implication $P \implies Q$ est une proposition, alors que la phrase "P est vraie, donc Q est vraie" est un **RAISONNEMENT**, i.e un enchevêtrement complexe de propositions :
((P est vraie) **ET** ($P \implies Q$) est vraie), **DONC** Q est vraie.

Propositions et connecteurs logiques

Résumé

Retenez donc bien que l'implication $P \implies Q$ est une proposition, alors que la phrase "P est vraie, donc Q est vraie" est un **RAISONNEMENT**, i.e un enchevêtrement complexe de propositions :
((P est vraie) **ET** ($P \implies Q$) est vraie), **DONC** Q est vraie.

Vocabulaire

Considérons deux propositions P et Q.

1. On dit que P est une **condition suffisante** pour Q si $P \implies Q$: si P est vraie, alors Q est vraie.
2. La proposition $Q \implies P$ est la **réciproque** de la proposition $P \implies Q$.
3. On dit que P est une **condition nécessaire** pour Q si $Q \implies P$: si Q est vraie, alors P est vraie.

Propositions et connecteurs logiques

Vocabulaire (suite)

Par exemple, soient P : "$x > 0$" et Q : "$x > -1$" : P est une condition suffisante pour Q (mais P n'est pas nécessaire pour Q)

4. Si $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$, on dit que les propositions P et Q sont **équivalentes**, et on écrit $P \iff Q$.
   On dit aussi "P si et seulement si Q.
5. On appelle **contraposée** de l'implication : $P \implies Q$ l'implication : $\neg Q \implies \neg P$. $P \implies Q$ et sa contraposée sont équivalentes.

Deux raisonnements usuels pour prouver une implication $P \implies Q$

1. **Le raisonnement par l'absurde** : on suppose P vraie et Q fausse, puis on aboutit à une contradiction.
2. **Le raisonnement par contraposée** : on suppose Q fausse et on prouve que P est fausse.

Exemples de preuves d'implication

1. Prouvez directement que pour tout réel $x \in [3;8]$, on a :
$\dfrac{-2}{\sqrt{x+1}} \in \left[-1; -\dfrac{2}{3}\right]$
2. Soit n un entier naturel. Prouvez par l'absurde que si n^2 est pair, alors n est également pair.
3. Retrouvez ce résultat par contraposée.
4. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est l'ensembles des nombres qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Prouvez par l'absurde que $x = \sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
Indication : Vous pourrez vous servir du fait que toute fraction possède un représentant irréductible.

Propositions et connecteurs logiques

Soyez attentifs à la rédaction employée. Vous devrez vous l'approprier autant que le fait de respirer est naturel !

Correction des exemples

1. **Soit** $x \in [3;8]$ i.e $3 \leq x \leq 8$. Alors $4 \leq x+1 \leq 9$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$ (donc sur $[4;9]$), on a : $2 \leq \sqrt{x+1} \leq 3$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ (donc sur $[2;3]$), on en déduit que : $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \geq \dfrac{1}{3}$. On multiplie par le réel $-2 < 0$ chaque membre de l'inégalité, d'où : $-1 \leq \dfrac{-2}{\sqrt{x+1}} \leq -\dfrac{2}{3}$ i.e $x \in \left[-1; -\dfrac{2}{3}\right]$.

Propositions et connecteurs logiques

Soyez attentifs à la rédaction employée. Vous devrez vous l'approprier autant que le fait de respirer est naturel !

Correction des exemples

1. **Soit** $x \in [3;8]$ i.e $3 \leq x \leq 8$. Alors $4 \leq x+1 \leq 9$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$ (donc sur $[4;9]$), on a : $2 \leq \sqrt{x+1} \leq 3$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ (donc sur $[2;3]$), on en déduit que : $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \geq \dfrac{1}{3}$. On multiplie par le réel $-2<0$ chaque membre de l'inégalité, d'où : $-1 \leq \dfrac{-2}{\sqrt{x+1}} \leq -\dfrac{2}{3}$ i.e $x \in \left[-1;-\dfrac{2}{3}\right]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que n^2 soit pair **et** n impair. Or n impair signifie qu'il existe un entier naturel p tel que $n = 2p+1$. En élevant au carré : $n^2 = 4p^2+4p+1 = 2(2p^2+2p)+1$, donc n^2 impair. Or nous avons supposé n^2 pair. Contradiction !

Correction des exemples

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par contraposée, supposons que n ne soit pas pair *i.e* n impair. Alors il existe un entier naturel p tel que $n = 2p + 1$. En élevant au carré : $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$, donc n^2 impair *i.e* n^2 n'est pas pair !

Propositions et connecteurs logiques

Correction des exemples

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par contraposée, supposons que n ne soit pas pair *i.e* n impair. Alors il existe un entier naturel p tel que $n = 2p + 1$. En élevant au carré : $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$, donc n^2 impair *i.e* n^2 n'est pas pair !

4. Posons $x = \sqrt{2}$ et supposons par l'absurde que x soit rationnel. Comme $x > 0$, il existe deux entiers naturels p et q strictement positifs tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, fraction que l'on supposera **irréductible**.

   En élevant chaque membre au carré nous obtenons que $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$, d'où $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, donc d'après (3) p est pair. Mais alors il existe $p' \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2p'$, et partant $p^2 = 4p'^2 = 2q^2$. D'où $q^2 = 2p'^2$ i.e q^2 pair. Mais alors q est pair : 2 divise donc p et q, ce qui **contredit** le fait que la fraction p/q soit irréductible.

Quantificateurs

Introduction : En français, *quantifier* signifie *attribuer une quantité* à quelqu'un, quelque chose ...
En statistiques vous avez déjà rencontré des variables quantitatives, i.e auxquelles on peut associer un nombre : la taille d'un individu, d'un arbre, la masse d'un objet, etc.

Quantificateurs

Introduction : En français, *quantifier* signifie *attribuer une quantité* à quelqu'un, quelque chose ...
En statistiques vous avez déjà rencontré des variables quantitatives, i.e auxquelles on peut associer un nombre : la taille d'un individu, d'un arbre, la masse d'un objet, etc.

Nous allons définir ici la notion de **quantificateurs** en mathématiques qui traduira les phrases du type :

1. **Pour tout élément** x appartenant à un certain ensemble E, on la propriété $\mathcal{P}(x)$.

Quantificateurs

Introduction : En français, *quantifier* signifie *attribuer une quantité* à quelqu'un, quelque chose ...
En statistiques vous avez déjà rencontré des variables quantitatives, i.e auxquelles on peut associer un nombre : la taille d'un individu, d'un arbre, la masse d'un objet, etc.

Nous allons définir ici la notion de **quantificateurs** en mathématiques qui traduira les phrases du type :

1. **Pour tout élément** x appartenant à un certain ensemble E, on la propriété $\mathcal{P}(x)$.
2. **Il existe (au moins) un élément** x appartenant à un certain ensemble E **tel que** : $\mathcal{P}(x)$.

Quantificateurs

Vocabulaire

1. **Quantificateur universel** $\forall$: La proposition $\forall x,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie si **tout** objet mathématique a la propriété $\mathcal{P}$ et fausse sinon, i.e si au moins un objet n'a pas la propriété $\mathcal{P}$.
2. **Quantificateur existentiel** $\exists$: La proposition $\exists x,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie si **au moins un** objet mathématique a la propriété $\mathcal{P}$ et fausse sinon, i.e si aucun un objet n'a la propriété $\mathcal{P}$.

Quantificateurs

Vocabulaire

1. **Quantificateur universel** $\forall$: La proposition $\forall x,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie si **tout** objet mathématique a la propriété $\mathcal{P}$ et fausse sinon, i.e si au moins un objet n'a pas la propriété $\mathcal{P}$.
2. **Quantificateur existentiel** $\exists$: La proposition $\exists x,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie si **au moins un** objet mathématique a la propriété $\mathcal{P}$ et fausse sinon, i.e si aucun un objet n'a la propriété $\mathcal{P}$.

Remarques : En pratique, on verra souvent :

1. $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$, où E est un ensemble, ce qui résume en fait : $\forall x,\ (x \in E \implies \mathcal{P}(x))$ et signifie que tout élément de E a la propriété $\mathcal{P}$.
2. $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$, où E est un ensemble, ce qui résume en fait : $\exists x,\ (x \in E$ et $\mathcal{P}(x))$ et signifie qu'au moins un élément de E a la propriété $\mathcal{P}$.

Quantificateurs

Un exemple de traduction Français / Mathématiques

Suites arithmétiques : on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n : $\underline{u_{n+1} - u_n = r}$.

La propriété $\mathcal{P}$ dépend ici de l'entier n et l'on note $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} - u_n = r$.

Nous traduirons donc le fait qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est une suite arithmétique par : $(\exists r \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}), \underline{u_{n+1} - u_n = r}$.

Remarque fondamentale : Ce réel r **ne dépend pas** de l'entier n. C'est le même r que n vaille 0, 1, 1000, etc.

Mise en garde sur l'inversion des quantificateurs

On ne peut PAS inverser les quantificateurs dans l'exemple précédent sans changer complètement le sens ! Dans ce cas, r dépendrait de n.

Quantificateurs

Propriétés des quantificateurs

1. **Inversion** : On peut inverser des quantificateurs universels ou existentiels *qui se suivent* :
    - $\forall x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \forall y \in F, \forall x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
    - $\exists x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \exists y \in F, \exists x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.

Propriétés des quantificateurs

1. **Inversion** : On peut inverser des quantificateurs universels ou existentiels *qui se suivent* :
   - $\forall x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \forall y \in F, \forall x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
   - $\exists x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \exists y \in F, \exists x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
2. **Implication** :
   $\exists x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \implies \forall x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y)$, avec réciproque fausse.

Quantificateurs

Propriétés des quantificateurs

1. **Inversion** : On peut inverser des quantificateurs universels ou existentiels *qui se suivent* :
   - $\forall x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \forall y \in F, \forall x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
   - $\exists x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \exists y \in F, \exists x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
2. **Implication** :
   $\exists x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \implies \forall x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y)$, avec réciproque fausse.
3. **Négation** :
   - $\neg(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \equiv (\exists x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x))$
   - $\neg(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \equiv (\forall x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x))$

Quantificateurs

Propriétés des quantificateurs

1. **Inversion** : On peut inverser des quantificateurs universels ou existentiels *qui se suivent* :
   - $\forall x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \forall y \in F, \forall x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
   - $\exists x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \exists y \in F, \exists x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
2. **Implication** :
   $\exists x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \implies \forall x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y)$, avec réciproque fausse.
3. **Négation** :
   - $\neg(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \equiv (\exists x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x))$
   - $\neg(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \equiv (\forall x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x))$

Remarque : On retrouve dans la négation d'une propriété vraie pour tous les x appartenant à un ensemble E la définition du quantificateur universel. <u>Relisez-la bien</u> ! Idem avec le quantificateur existentiel.

Quantificateurs

Exemple 1

Traduire en français les propositions qui suivent et préciser leur véracité. Si la proposition est fausse, donner un contre-exemple ou une justification précise.

1. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq N$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{N},\ x < y^2$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ n = x + y$

Exemple 2 (à comprendre également graphiquement)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et ℓ un réel.
Traduire à l'aide de quantificateurs la proposition suivante :
Pour tout réel strictement positif ϵ, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, $|u_n - \ell| < \epsilon$.

Exemple 3

Nier les propositions $\mathcal{P}$ qui suivent à l'aide des quantificateurs, puis traduire en français la proposition $\neg\mathcal{P}$.

1. $\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \implies x \geq 3$
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{P} : \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$
3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{P} : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$
4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   $\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \implies f(x) < f(y)$
5. $\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z},\ x = p^2 + q^2$
6. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   $\mathcal{P} : \exists T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)$.
7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
   $\mathcal{P} : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_{n+1} \leq u_n$.

Le raisonnement par récurrence

Voici l'un des raisonnements les plus importants que vous utiliserez à de nombreuses reprises au cours de l'année. Il est fréquemment employé (mais pas toujours) lorsque l'on cherche à prouver qu'une certaine propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n ou à partir d'un certain rang.

Principe de récurrence

En conformité avec le programme de Terminale, nous en énoncerons sa forme la plus simple, dite *faible*.

Soit $\mathcal{P}(n)$ **une propriété dépendant d'un entier** $n \in \mathbb{N}$.

1. **Initialisation** : On démontre qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ soit vraie.
2. **Hérédité** : On se donne un entier naturel $n \geq n_0$ quelconque et on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On prouve alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3. **Conclusion** : La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers $n \geq n_0$.

L'exemple de base

Soit n un entier naturel non nul et $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. On veut prouver que

pour tout entier naturel n non nul : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}(n)$: $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. **Initialisation** : $S_1 = 1$ et $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

L'exemple de base

Soit n un entier naturel non nul et $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. On veut prouver que

pour tout entier naturel n non nul : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}(n) : S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. **Initialisation** : $S_1 = 1$ et $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
2. **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie i.e que pour cet entier n, on a $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie i.e que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Par définition, on a $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k$, soit en isolant le dernier terme de la somme :

Le raisonnement par récurrence

Par définition, on a $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k$, soit en isolant le dernier terme de la somme : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = S_n + (n+1)$.

Or par hypothèse de récurrence, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. D'où :

$S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. Factorisant $n+1$, il vient :

Par définition, on a $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k$, soit en isolant le dernier terme de la somme : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = S_n + (n+1)$.

Or par hypothèse de récurrence, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. D'où :
$S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. Factorisant $n+1$, il vient :
$S_{n+1} = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$, soit $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par définition, on a $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k$, soit en isolant le dernier terme de la somme : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = S_n + (n+1)$.

Or par hypothèse de récurrence, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. D'où :
$S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. Factorisant $n+1$, il vient :
$S_{n+1} = (n+1)\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$, soit $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : on a prouvé que $\mathcal{P}(1)$ est vraie et que pour tout entier naturel n non nul, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$, donc :

Pour tout entier naturel n non nul $\mathcal{P}_n$ est vraie i.e $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Terminons par un exemple d'application aux suites numériques.

Suites récurrentes et ... récurrence !

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$. Prouver par récurrrence que pour tout entier naturel n : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$. Interpréter le résultat obtenu.

Posons pour tout entier naturel n : $\mathcal{P}(n) : 0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

1. **Initialisation** : $u_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On a bien $0 < u_0 < u_1 < 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2. Fixons $n \in \mathbb{N}$ quelconque et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie : pour cet entier n, $0 < u_n < u_{n+1} < 1$. Prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie i.e $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$.

De $0 < u_n < u_{n+1} < 1$, on tire que $\frac{1}{2} < \frac{1+u_n}{2} < \frac{1+u_{n+1}}{2} < 1$.
Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, on en déduit que : $\sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} < \sqrt{\frac{1+u_{n+1}}{2}} < 1$.
D'où : $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

De $0 < u_n < u_{n+1} < 1$, on tire que $\frac{1}{2} < \frac{1+u_n}{2} < \frac{1+u_{n+1}}{2} < 1$.
Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$, on en déduit que : $\sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} < \sqrt{\frac{1+u_{n+1}}{2}} < 1$.
D'où : $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : on a prouvé que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$, donc :
Pour tout entier naturel n non nul $\mathcal{P}_n$ est vraie i.e pour tout entier naturel n : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Ceci prouve que la suite (u_n) est strictement croissante et tous ses termes u_n appartiennent à l'intervalle $]0;1[$. En particulier, (u_n) est bornée.