Généralités sur les fonctions

Dans le langage usuel, on est souvent amené à parler de dépendance (ou d'indépendance) entre deux quantités :
- Le rendement d'une culture dépend de la pluviométrie, de l'apport en nitrates…
- La température est fonction de l'agitation des molécules,
- Dans un magasin, à un article donné correspond un unique prix.
- La température est fonction de l'heure de la journée,

PAR CONTRE :

- A un prix donné correspondent (éventuellement) plusieurs articles dans le même magasin.
- L'aire d'un triangle ne dépend pas de la mesure de ses trois angles.

Nous allons définir mathématiquement cette notion de « être fonction de » entre deux variables.

I) Définitions

Dans toute la suite, D désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Définir une **fonction** f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D un **unique** réel noté $f(x)$.

Exemples :

1. Une voiture part d'une ville A à 18h et arrive dans une ville B à 19h. A chaque instant, on peut lui associer **sa** vitesse (instantanée).
   ☺ On a bien défini une fonction, car à un instant donné la voiture ne peut pas avoir deux vitesses différentes.
2. Soit f la fonction définie sur $[-4;5]$ par $f(x)=x^2+1$. Ceci signifie qu'à chaque réel x compris entre -4 et 5, on associe l'unique réel $f(x)=x^2+1$.
   - Calculer si possible les réels :
     $f(-2)$: $f(-2)=(-2)^2+1=4+1=5$
     $f(4)$:
     $f(6)$:
   - Résoudre si possible dans $[-4;5]$ les équations :
     $f(x)=10$: $x^2+1=10$
     $x^2=9$
     $x=3 \ ou \ x=-3$

     $S=\{\quad ; \quad\}$

     $f(x)=0$

     $f(x)=1$

Vocabulaire

- D s'appelle **l'ensemble de définition** de la fonction *f*.
- $f(x)$ s'appelle **l'image** du réel *x* par *f*.
- Si k est un réel, on appelle **antécédent** de k, tout réel *x* appartenant à D tel que $f(x)=k$.

Remarques importantes :

- L'image $f(x)$ d'un réel *x* appartenant à D est **unique**.
- Par contre, il peut y avoir **un, aucun, ou plusieurs** antécédents pour un réel donné.

Dans l'exemple précédent : 10 a antécédents, qui sont :
0 a antécédent.
1 a antécédent, qui est :

▲ **Il est essentiel de comprendre la différence entre image et antécédent** :

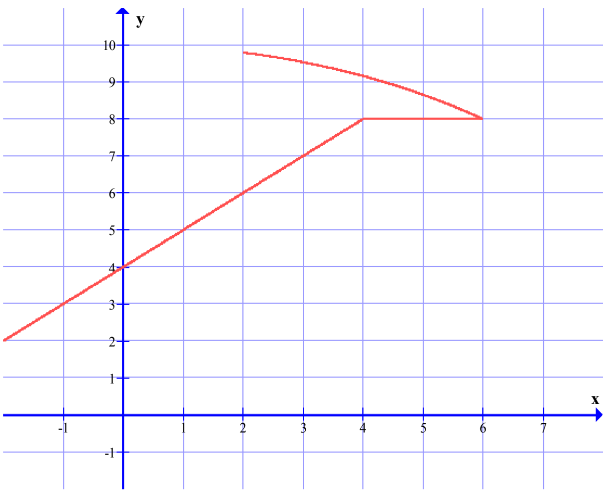
- A chaque instant, il correspond une seule température (IMAGE) ; par contre il a pu faire la même température à des instants différents (ANTECEDENTS).
- De manière générale, si l'on a défini une fonction sur un ensemble D :

Calculer l'image de *x* revient à calculer $f(x)$.   **Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de k par *f* revient à résoudre sur D l'équation** $f(x)=k$.

II) Courbe représentative d'une fonction

N'importe quelle courbe ne peut représenter une fonction. On rappelle que définir une fonction *f* sur un ensemble D, c'est associer à chaque réel x de D un et un seul réel, noté $f(x)$ (l'image de *x*).

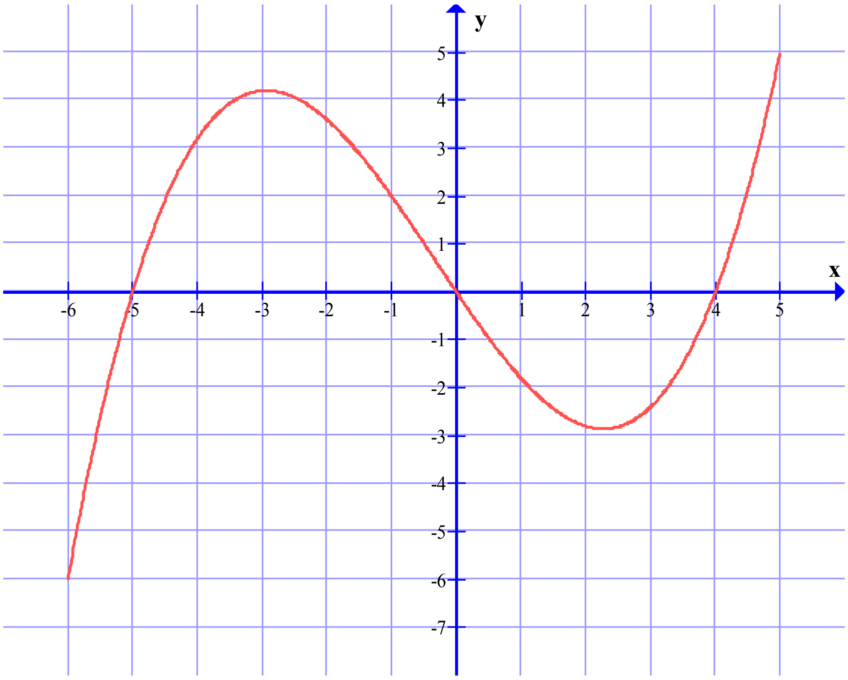
On rapportera le plan usuel à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Justifier pourquoi la courbe ci-dessous n'est PAS la courbe représentative d'une fonction *f*.



Les valeurs de la variable *x* (en particulier les antécédents d'un réel donné) se lisent sur l'axe des abscisses

L'image $f(x)$ se lit sur l'axe des ordonnées.

On considère ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f.



1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. Déterminer graphiquement les images de 5 et de -1 par f.
3. Déterminer graphiquement $f(-4)$
4. On veut résoudre graphiquement l'équation $f(x)=2$.
   - Quelle différence faîtes-vous entre $f(2)$ et $f(x)=2$?

   - Tracer sur le graphique l'ensemble des points du plan qui ont pour ordonnée 2.

   - Doit-on s'intéresser à tous ces points ? Sinon, lesquels ?

   - Résoudre l'équation $f(x)=2$, c'est déterminer l' des points d'intersection de (C) avec la droite d'équation $y =$
   - Conclure : $S =$

5. Déterminer graphiquement (en rédigeant) tous les antécédents de 0 par f.

De manière générale, si f est une fonction définie sur D, on veut savoir à quelles conditions sur x et y, un point M (x ; y) appartient à la courbe représentative de f.

- Si un point M (x ; y) appartient à la courbe représentative de f. Quel lien existe-t-il entre x et y ?

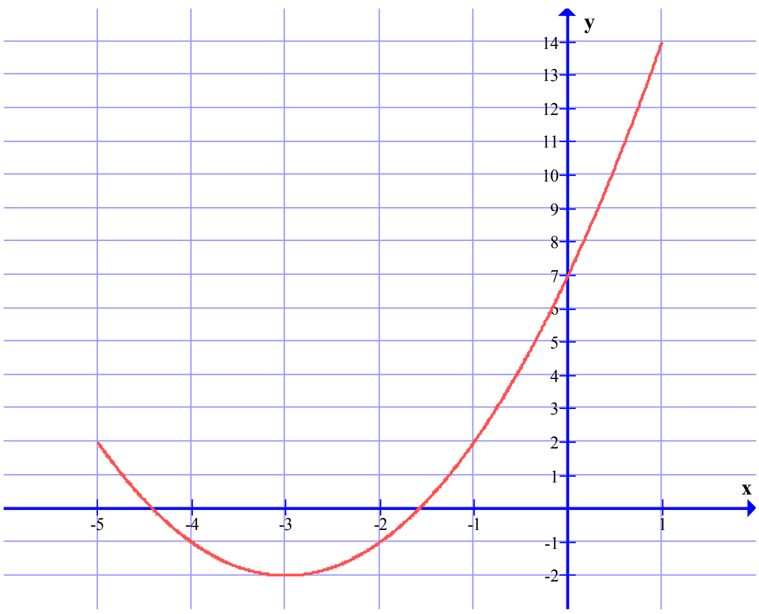
- Réciproquement, si x appartient à D, le point M (x ; $f(x)$) appartient à la courbe représentative de f.

<u>Conclusion</u> : Un point M (x ; y) appartient à la courbe représentative (C) d'une fonction f si et seulement si : x appartient à D et $y = f(x)$.

<u>Exemple</u> : Soit f la fonction définie sur $[-4;5]$ par $f(x) = x^2 + 1$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Le point A (-3 ; 10) appartient-il à (C) ?
Même question avec le point B (4 ; 7) et le point C (6 ; 37).

III) Variations d'une fonction

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5;1]$ par $f(x) = x^2 + 6x + 7$. A l'aide de cette représentation graphique, dresser le tableau de variations de f sur $[-5;1]$.



x	-5	-3	1
Variations de f			

<u>Définitions</u> : Soit f une fonction définie sur D et I un intervalle inclus dans D.

1. On dit que f est **strictement croissante** sur I si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$.
2. On dit que f est **strictement décroissante** sur I si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$.
3. On dit que f est **constante** sur I si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels on a $f(x_1) = f(x_2)$.

De manière heuristique, dire qu'une fonction f est croissante signifie que lorsque les valeurs das abscisses augmentent, alors les valeurs des images augmentent : la fonction f « garde l'ordre ».
De la même manière, dire qu'une fonction f est décroissante signifie que lorsque les valeurs das abscisses augmentent, alors les valeurs des images diminuent : la fonction f « inverse l'ordre ».

<u>Exercices</u> :

1. Prouver que la fonction f qui à tout réel x associe $3x-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que la fonction f qui à tout réel x associe $-5x+12$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

IV) <u>Minimum et maximum d'une fonction</u>

En reprenant l'exemple précédent, déterminer le minimum de f et le maximum de f sur $[-5;1]$.

Quel sont le minimum et le maximum de f sur [-2 ; 0] ?

<u>Remarque</u> : il est donc important de préciser sur quel intervalle on cherche le minimum ou le maximum d'une fonction.