Corrigé TP radioactivité / fonction exponentielle

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

10 février 2024

Table des matières

1 Evolution temporelle de la radioactivité

Rappel de ce qui va particulièrement nous intéresser mathématiquement. Il s'agit, étant donné un élément radioactif ${}^{A}_{Z}X$ d'étudier l'évolution du nombre d'atomes radioactifs restants (ne s'étant pas désintégrés) en fonction du temps t d'observation.
Nous noterons N_0 le nombre initial d'atomes radioactifs de l'élément ${}^{A}_{Z}X$.

$N(t)$ désigne le nombre d'atomes radioactifs du même élément à l'instant t.
Notre temps d'observation entre $t = 0$ et T est subdivisé en sous-intervalles de temps réguliers $\Delta t = \dfrac{T}{n}$, autrement dit, on observera le nombre d'atomes radioactifs restants de ${}^{A}_{Z}X$ aux instants : $0,\ \Delta t,\ 2\Delta t, \ldots n\Delta t = T$.
Pendant la durée Δt, la variation $\Delta N(t)$ du nombre d'atomes radioactifs est égale à :

$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$$

Remarquons que pour tout instant t, $\Delta N(t) < 0$.

L'activité moyenne $A(t)$ exprimée en Becquerels (Bq) est le nombre moyen de désintégrations par seconde : $A(t) = -\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}$. (d'où vient le signe "moins" ?)
Elle est proportionnelle au nombre d'atomes radioactifs restants à l'instant t : $A(t) = \lambda N(t)$, avec λ constante radioactive qui dépend uniquement du nucléide radioactif considéré (Il s'agit de la loi de Rutherford et Soddy (1902)) et s'exprime en s^{-1}.
Ainsi, on a :

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t) \quad (*)$$

Remarques :

1. La loi de Rutherford-Soddy traduit que la probabilité pour un atome radioactif de se désintégrer pendant un intervalle de temps Δt est égale à $\lambda \Delta t$.
2. On parle d'activité "**sans mémoire**".

Faisant tendre Δt vers 0 dans (*), on obtient l'équation :

$$\boxed{N'(t) = -\lambda N(t)}$$

Cette équation faisant intervenir une fonction N et sa dérivée N' est une équation où l'inconnue est une fonction ! On parle d'**équation différentielle**.

Quelques valeurs de λ exprimées en s^{-1} ou jour^{-1} ou an^{-1} :
- pour l'uranium : $\lambda = 1,5 \times 10^{-10}$ an^{-1}
- pour le carbone 14 : $\lambda = 1,2 \times 10^{-4}$ an^{-1}
- pour l'iode 131 : $\lambda = 8,5 \times 10^{-2}$ jour^{-1}

Récapitulons : Pour λ donné, on cherche une fonction N définie ici sur $[0; +\infty[$ telle que :

$$\boxed{\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (t \in [0; +\infty[)}$$

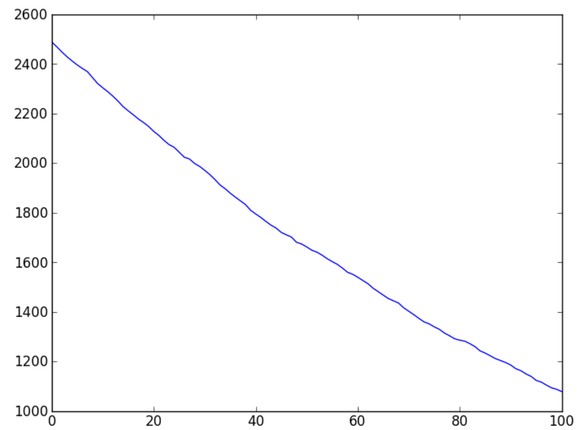
1.1 Modélisation algorithmique

La probabilité qu'un atome d'iode 131 se désintègre par jour est égale 0,0085.
L'unité de temps étant le jour, écrivez un script qui sur 100 jours détermine jour par jour, la quantité d'iode 131 restante. Tracez la courbe obtenue. On donne ici un script écrit avec le langage Python. Il nécessite pour le tracé de la courbe d'avoir installé matplotlib.

```python
# Desintegration radioactive
import matplotlib.pyplot as plt
from random import *
N=2500
listex,listey=[0],[2500]

# fonction modelisant le processus de desintegration
def desintegration(N):
    global Nb
    Nb=N
    n=0
    liste=[random() for i in range(N)]
    for j in range(len(liste)):
        if liste[j]<=0.0085:
            n=n+1
    Nb=N-n
    return Nb

i=0
while i<=100 and N>=0:
    #print(i,N)
    desintegration(N)
    N=Nb
    i=i+1
    listex.append(i)
    listey.append(N)
plt.plot(listex,listey)
plt.show()
```



1.2 Traitement avec la méthode d'Euler

Méthode d'Euler : La suite de points $A_i(x_i; y_i)$ qui approximent la vraie courbe de f est donnée par la relation de récurrence suivante :

$$\boxed{\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h_n \\ y_{k+1} = g(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + y_k \end{cases} \qquad (0 \leq k \leq n-1)}$$

Ici, N vérifie $N'(t) = -0,0085N(t)$ et $N(0) = 2500$. On restreint l'étude de N à un intervalle $[0; T]$ $(T > 0)$ que l'on subdivise en n sous-intervalles $[x_k; x_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq n-1)$.

1. De quelle nature est la suite (x_k) ? Exprimer x_k en fonction de x_0, k et n.

   Comme pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, on a $x_{k+1} - x_k = \dfrac{T}{n}$, (x_k) est une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{T}{n}$.

   Ainsi, $x_k = x_0 + k\dfrac{T}{n} = \dfrac{kT}{n}$

2. Même question avec (y_k).

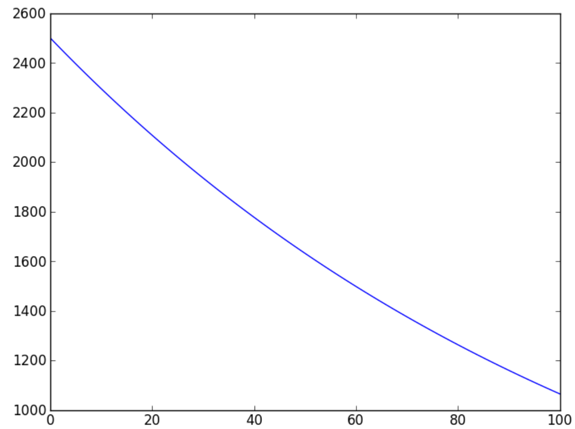
   Ici, pour tout entier k compris entre 0 et n, on a $g(x_k, y_k) = -0,0085y_k$, d'où $y_{k+1} = -0,0085y_k\dfrac{T}{n} + y_k$, soit $y_{k+1} = \left(1 - 0,0085\dfrac{T}{n}\right) y_k$. Ainsi, (y_k) est une suite géométrique de raison $q = 1 - 0,0085\dfrac{T}{n}$ et pour tout entier k compris entre 0 et n, on a $y_k = 2500\left(1 - 0,0085\dfrac{T}{n}\right)^k$. En particulier, $y_n = 2500\left(1 - 0,0085\dfrac{T}{n}\right)^n$.

3. En utilisant la méthode d'Euler, déterminez à l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de votre choix l'allure de la courbe représentative de N sur 100 jours. Comparez-la avec celle obtenue à la sous-section précédente.

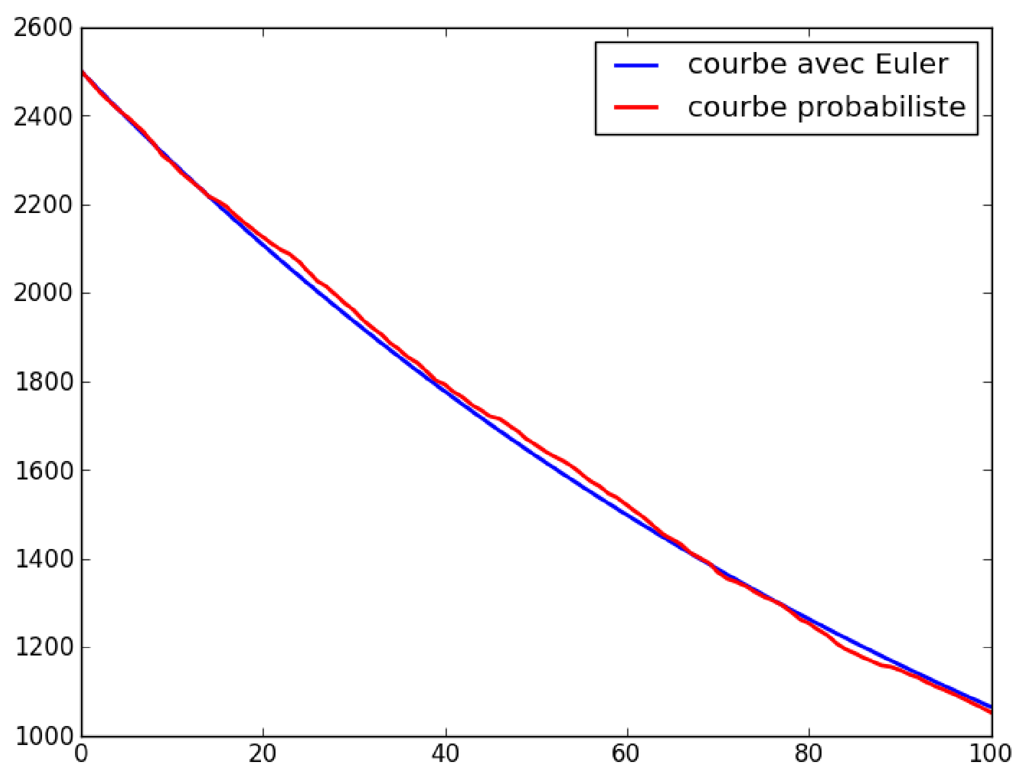
```
import matplotlib.pyplot as plt
x,y = 0,2500
listex,listey = [x],[y]
x=0
while x<=100 and y>=0 :
    x = x+1
```

```
    y = (1-0.0085)*y
    listex.append(x)
    listey.append(y)

plt.plot(listex,listey)
plt.show()
```



Un script donné en annexe mixant les deux scripts précédents permet d'obtenir de visu la comparaison des deux méthodes (probabiliste et Euler). Le résultat est sans appel : la similitude est frappante !



1.3 Quelques questions

1. La fonction N dont nous avons obtenu l'idée de la courbe représentative est-elle la seule (unicité) vérifiant notre équation différentielle : $\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (t \geq 0)$

   La réponse est OUI, avec la condition initiale fixée. La preuve est la même que celle présentée dans la section suivante : Vers la fonction exponentielle.

2. On a parlé tout à l'heure d'activité de désintégration **sans mémoire**. Comment comprenez-vous cette phrase ?

   On peut la comprendre de la manière suivante : Quelle que soit la valeur de t, et s'il reste encore des atomes radioactifs, le nombre moyen de désintégration entre l'instant t et l'instant $t+s$ est égal au nombre moyen de désintégration entre l'instant 0 et l'instant s. Autrement dit, seule la durée d'observation compte. Il n'y a pas de mémoire de ce qui s'est passé précédemment.

2 Vers la fonction exponentielle

Les sections précédentes nous ont permis de nous poser les problèmes suivants : existe-t-il une certaine fonction N proportionnelle à sa dérivée N', vérifiant une certaine condition initiale, et si oui, quelle peut être l'allure de sa courbe ? La condition initiale : donnée de $N(0)$ est-elle capitale ?
Intéressons-nous au problème suivant : trouver une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$

(f est égale à sa propre dérivée). Remarquons qu'ici, nous n'avons pas spécifié de condition initiale.

1. Soit λ un réel. Posons $g = \lambda f$. Prouvez que l'on a aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$. Conclure sur le nombre de solutions de l'équation différentielle $f' = f$.

   On a $g' = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda f = g$. Donc g vérifie la même équation différentielle que f. Comme λ est quelconque, on en déduit que le nombre de solutions de l'équation différentielle $f' = f$ est infini.

2. Si f et g sont deux fonctions vérifiant $f' = f$ et $g' = g$ sur $\mathbb{R}$, que vérifie $f + g$?

   $f + g$ vérifie aussi l'équation différentielle $(f + g)' = f + g$.

3. On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$. Ajoutons-y la condition initiale $f(0) = 1$.

   a) Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x)f(-x)$. Justifier que ϕ est constante égale à 1. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

   ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\phi'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x))$. Or $f' = f$ sur $\mathbb{R}$ donc $\phi'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$. Le principe de Lagrange nous dit alors que ϕ est constante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout réel x, $\phi(x) = \phi(0) = f(0)^2 = 1$.
   Supposons que f s'annule sur $\mathbb{R}$. Il existe (au moins) un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Mais alors $\phi(x_0) = f(x_0)f(-x_0) = 0$. Absurde car $\phi(x_0) = 1$. Donc f ne s'annule jamais.

   b) Démontrer que si g est une fonction vérifiant $g' = g$ et $g(0) = 1$, alors on a nécessairement $g = f$.

   Grâce à la question précédente, on sait que g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Il est donc licite de poser $h = \dfrac{f}{g}$. h est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables et pour tout réel x, on a :

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0$$

Ainsi h est constante sur $\mathbb{R}$. D'où pour tout réel x, $h(x) = h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$. On a donc pour tout réel x, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ soit $f(x) = g(x)$, ce qui achève la preuve.

c) Conclure.

Il existe donc une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

On appelle **fonction exponentielle**, et on note **exp** l'unique fonction f vérifiant l'équation différentielle : $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$