# Nombre dérivé
# Tangente (aspect graphique)
# Meilleure approximation affine

## Nombre dérivé : approche théorique

En lien avec l'activité du nombre dérivé en un réel $a$, nous avons défini ce-dernier comme la limite lorsque h tend vers 0 (*si elle existe et si elle n'est pas infinie*) du rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

On note alors $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Ce réel $f'(a)$ a été interprété comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse $a$.

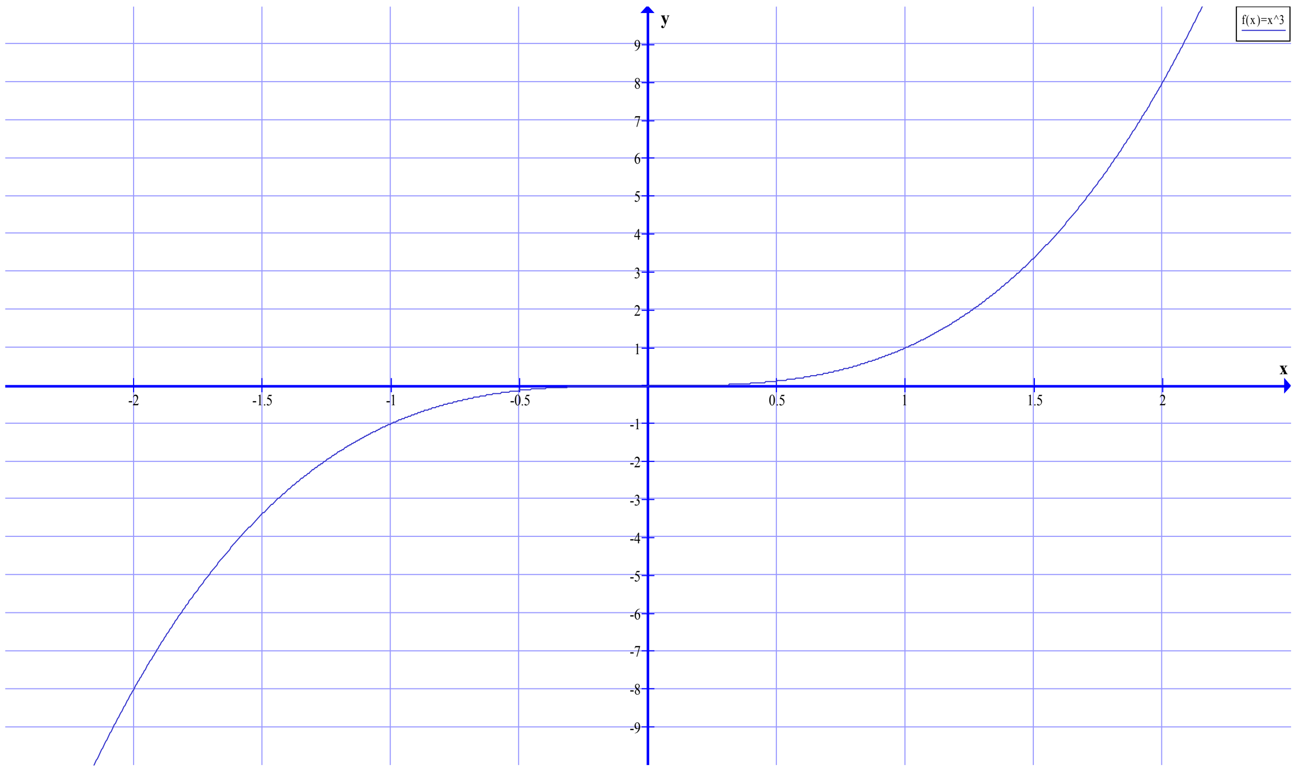
**Exercice 1**

Calculer pour les questions 1 et 2 le nombre dérivé de la fonction *f* au point d'abscisse $a$.

1. *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+9$ et $a = 5$
2. *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $a = -3$
3. *f* est définie sur [0 ; +∞[ par $f(x) = \sqrt{x}$. Le nombre dérivé de *f* en $a = 0$ existe-t-il ? Interpréter graphiquement ce résultat.
4. Dessiner la représentation graphique *C* d'une fonction *f* définie sur [-2 ; 2] et non dérivable en 0 mais pas pour les mêmes raisons qu'à l'exemple précédent.

**Exercice 2**

Justifier que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(a)$. Tracer de manière précise la tangente à *C*, courbe représentative de *f* au point A d'abscisse $1$ puis au point B d'abscisse -2.

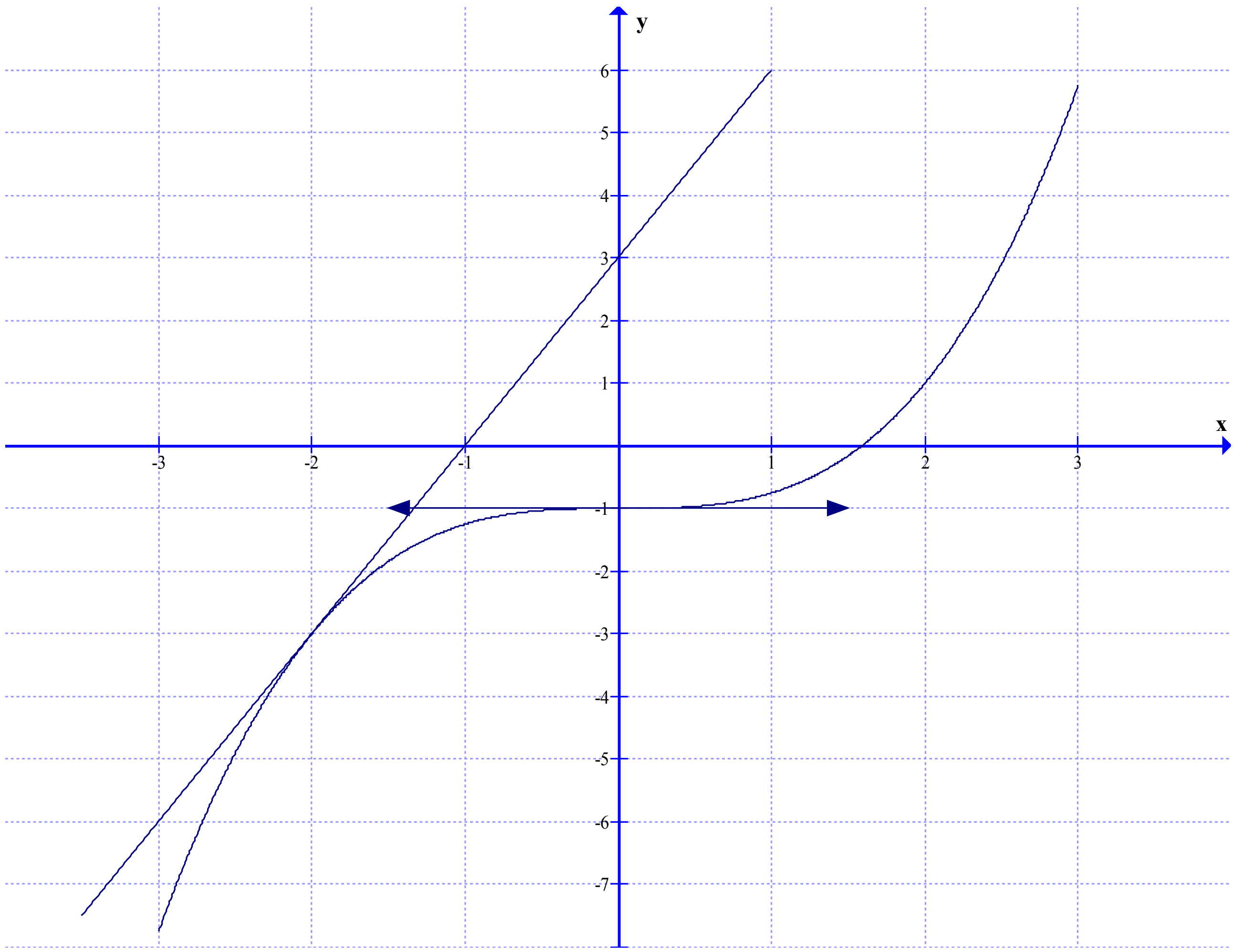


# Nombre dérivé : approche graphique

Rappel : Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I. Le **nombre dérivé** de $f$ en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f$, au point d'abscisse a. On le note $f'(a)$ .

Remarque : c'est un coefficient directeur, donc graphiquement on peut le déterminer comme vu dans les rappels sur les droites.
**ATTENTION : Ne pas confondre l'image de a, notée $f(a)$ avec le nombre dérivé en a, noté $f'(a)$ !**

Exemple : Soit $f$ une fonction définie sur [-3 ; 3] dont on a représenté la courbe représentative $C$ ci-dessous. On a représenté également les tangentes à $C$ aux points A d'abscisse -2, et B d'abscisse 0.




1. placer A et B.
2. a) Déterminer $f(-2)$

   b) Déterminer $f'(-2)$

3. a) Déterminer $f(0)$

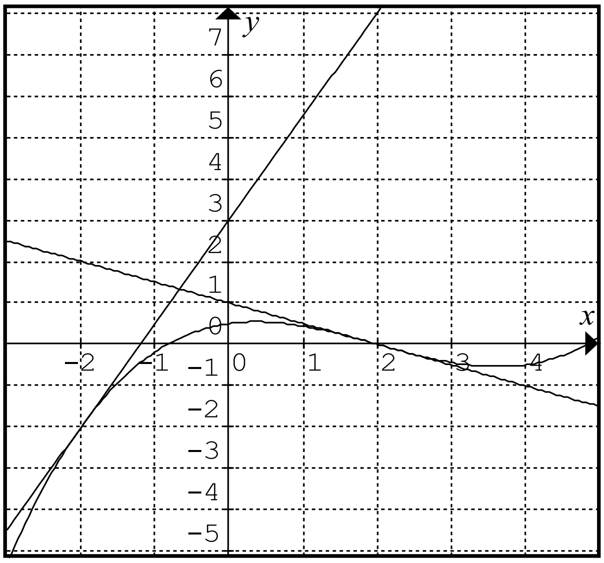
   b) Déterminer $f'(0)$

# Tangente à une courbe
# Détermination graphique d'une équation

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I, et a un réel appartenant à I.

On se souvient que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse a. Par conséquent, cette tangente a une équation de la forme $y = mx + p$. où $m = f'(a)$ et p est l'ordonnée à l'origine.

Soit $f$ la fonction définie sur [ -3 ; 5 ] dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. On a tracé les tangentes à la courbe aux points d'abscisses -2 et 2.

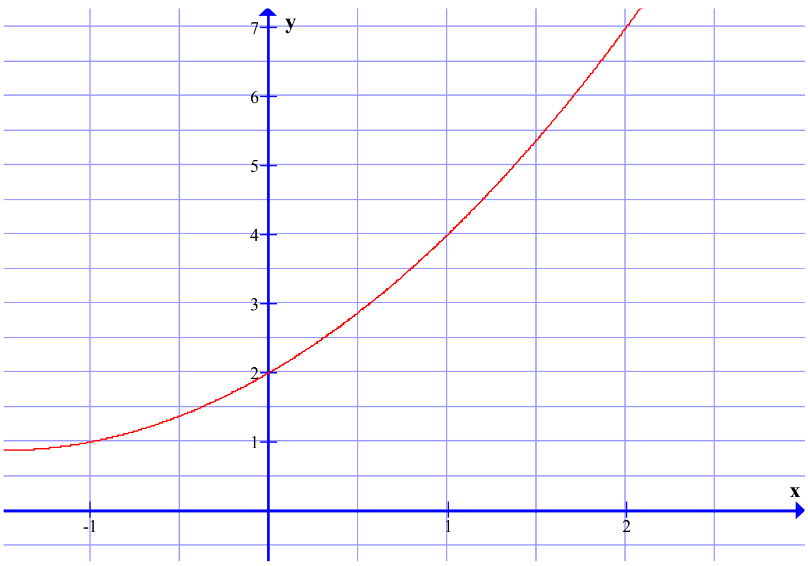



Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(2)$.

Donner l'équation des tangentes à la courbe aux points d'abscisse -2, puis 2.

<u>Exemple 2</u> : Soit $f$ la fonction définie sur [ -1,5 ; 2,2 ] par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ dont la courbe représentative ( C ) est donnée ci-dessous.

- Calculer $f'(x)$ (vous pourrez vous servir du tableau des dérivées usuelles). En déduire $f'(1)$.
- En déduire le tracé précis de la tangente à ( C ) au point d'abscisse 1. Donner son équation sous la forme $y = mx + p$.



# Meilleure approximation affine

Propriété et définition : Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $a$ un réel appartenant à I.
Si $f$ est dérivable en $a$, alors il existe une fonction $\phi$ telle que pour tout réel h, avec $a+h \in I$ : $f(a+h) = f(a)+hf'(a)+h\phi(h)$ et $\lim_{h \to 0} \phi(h) = 0$.

$f(a)+hf'(a)$ est appelée **approximation affine** de $f(a+h)$ lorsque $h$ est proche de 0.

A méditer : pourquoi ai-je employé le terme de meilleure approximation affine dans le titre ?

**Exercice 1**

$f$ est définie sur [0 ; +∞[ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Démontrer que pour tout réel $h \neq 0$ tel que $1+h \geqslant 0$, on a : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{1+h}-1}$
2. En déduire le nombre dérivé de $f$ en 1.
3. Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour $h$ proche de 0, associée à $f$.

**Exercice 2**

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. a) En revenant à la définition du nombre dérivé, démontrer que f est dérivable en 5 et donner la valeur de $f'(5)$.
   b) Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour $h$ proche de 0, associée à $f$ et préciser cette erreur.
2. Un carré a 5m de côté. Dans chaque cas, calculer mentalement une valeur approchée de l'aire du carré obtenu et indiquer l'erreur.
   a) On augmente le côté de 0,1m.
   b) On augment le côté de 5cm.

On se servira de cette notion d'approximation affine pour mettre en œuvre une méthode de construction (approchée) de la courbe représentative d'une fonction.
Cette méthode porte le nom de **méthode d'Euler**.

Rechercher sur internet ou ailleurs qui était Leonhard Euler.