Limite d'une fonction réelle de la variable réelle

1 Limite d'une fonction en un réel a

Dans toute la suite, D désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles non réduits à un point.

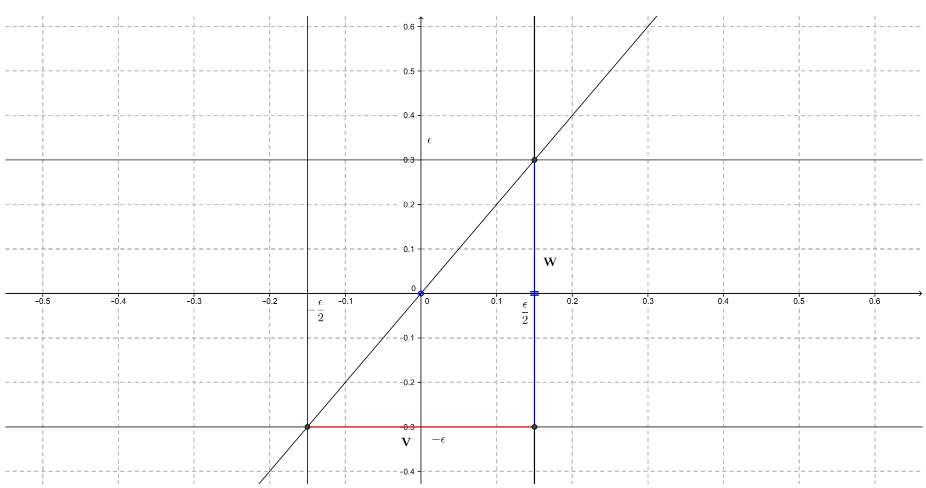
Définition 1 : On dit que la fonction f définie sur D admet pour **limite** le réel ℓ lorsque x tend vers a, et on note $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell}$ si pour tout intervalle ouvert $W =]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ centré en ℓ on peut trouver un intervalle ouvert $V =]a - \alpha; a + \alpha[$ centré en a tel que pour tout réel x appartenant à $V \cap D$, on a $f(x) \in W$: $(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D \cap]a - \alpha; a + \alpha[), |f(x) - \ell| < \epsilon$.

1.1 <u>Limite finie</u> en un réel a

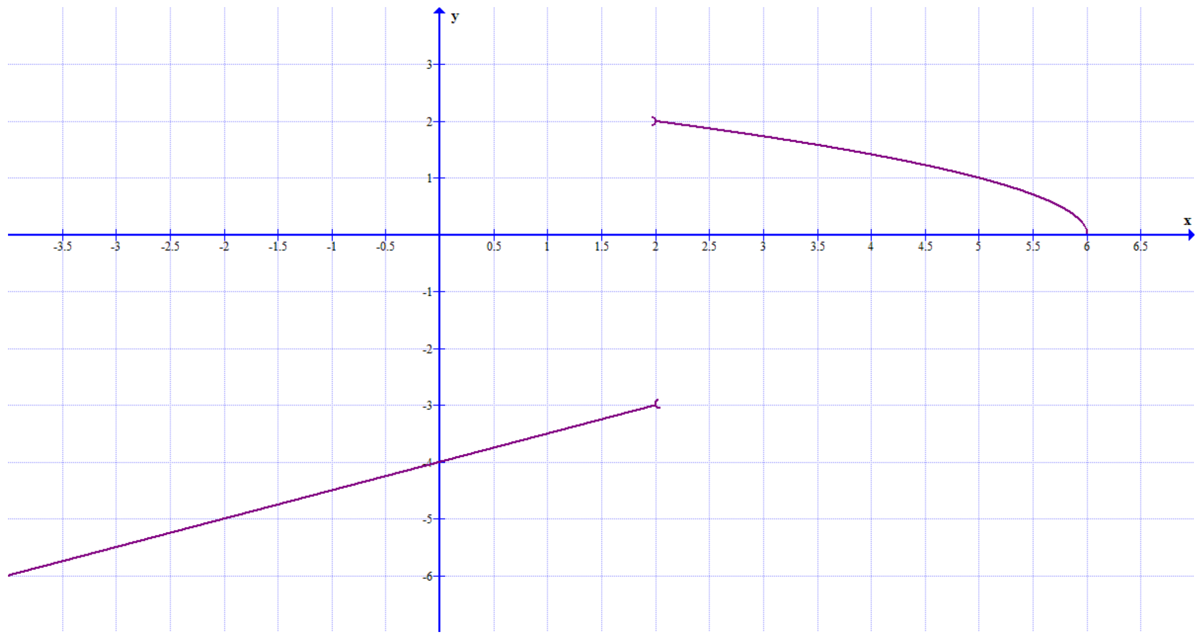
1.1.1 Cas où f n'est pas définie en a

Nous reprenons la définition générale de la limite en un réel a donnée précédemment, mais nous l'appliquons d'abord dans le cas où la fonction f n'est pas définie en a. Cependant, le réel a est *adhérent* à D.

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = 2x$. Alors on a $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
Démonstration : Soit $\epsilon > 0$ et $W =] - \epsilon; \epsilon[$. Posons alors $V =] - \epsilon/2; \epsilon/2[$. Si $x \in V \cap D$, on a $f(x) = 2x \in W$. D'où le résultat.



Contre-Exemple 1 : La fonction f définie sur $D =]-\infty; 6] \setminus \{2\}$ par $f(x) = \begin{cases} 0,5x - 4 \text{ si } x < 2 \\ \sqrt{6-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$ n'admet pas de limite en 2.



On a pourtant envie de dire que si x tend vers 2 par valeurs inférieures (en restant toujours **strictement inférieur** à 2), $f(x)$ tend vers -3.
De même, on a envie de dire que si x tend vers 2 par valeurs supérieures (en restant toujours **strictement supérieur** à 2), $f(x)$ tend vers 2.

Cette constatation nous amène à définir les notions de limite à droite et à gauche d'une fonction en un réel a *adhérent* à son ensemble de définition. Dans le cas précédent, 2 est adhérent à $D =]-\infty; 6] \setminus \{2\}$.

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur D et a un réel adhérent à D. On dit que le réel ℓ est **limite à gauche** (resp. **à droite**) de f en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout réel x appartenant à $D \cap]a-\alpha; a[$ (resp. à $D \cap]a; a+\alpha[$), on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$).

Propriétés et remarque :

1. Si la limite (resp. la limite à gauche, resp. la limite à droite) d'une fonction f existe en un réel a, alors elle est **unique**.
2. De plus, f est bornée "au voisinage" de a.
3. Au vu de leurs définitions, on peut également définir les limites à gauche ou à droite d'une fonction f en un réel a, même si a appartient à l'ensemble de définition D de cette fonction. De toutes façons, a est exclus des valeurs que peut prendre x quand x se rapproche de a, que ce soit par valeurs strictement inférieures ou par valeurs strictement supérieures. ATTENTION, ce n'est pas le cas dans la définition de limite ! Voyons ce que ceci implique dans le prochain paragraphe.

Ceci donne un premier critère de <u>non-existence</u> d'une limite en un réel a (que f y soit définie ou pas) :
Si f possède en a une limite à gauche ET une limite à droite **différentes**, alors f n'a pas de limite en a.

Dans le contre-exemple précédent, on a $\lim_{x \to a^-} f(x) = -3$ et $\lim_{x \to a^+} f(x) = 2$.
$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$, donc f n'a pas de limite en $a = 2$.

1.1.2 Cas où f est définie en a

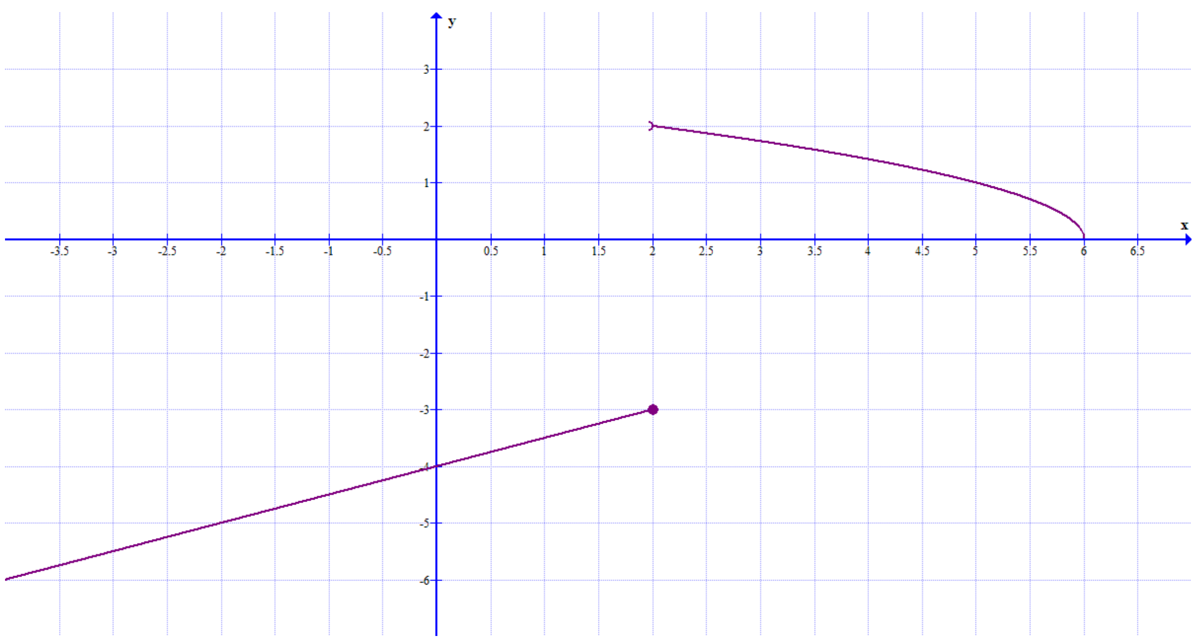
Théorème 1 : Si f est définie en a <u>et</u> si f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, alors nécessairement $\ell = f(a)$.

Démonstration : Supposons que f soit définie en a et que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ i.e que $(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D \cap]a - \alpha; a + \alpha[), f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$.
En particulier, comme f est définie en a, alors pour tout réel $\epsilon > 0$, $f(a) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$. En particularisant les réels ϵ sous la forme $\frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ell - \frac{1}{n} < f(a) < \ell + \frac{1}{n}$, d'où en faisant tendre n vers $+\infty$: $\ell = f(a)$ par encadrement.

Remarque : Il faut comprendre ce théorème comme quoi, si f est définie en a, alors on n'a pas trop le choix pour la limite de f en a : si cette dernière existe, alors nécessairement $\ell = f(a)$.

Ceci donne un second critère de non-existence d'une limite en un réel a où f est définie :
Si f possède en a une limite à gauche OU une limite à droite **différente de** $f(a)$, alors f n'a pas de limite en a.

On peut le visualiser graphiquement sur le contre-exemple suivant, très semblable au premier contre-exemple (mais il y a une différence notable) : La fonction f définie sur $D =]-\infty; 6]$ par $f(x) = \begin{cases} 0,5x - 4 \text{ si } x \leq 2 \\ \sqrt{6-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$ est définie en 2 : $f(2) = -3$.



On a $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = -3$ et $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$.
$\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq f(2)$, donc f n'a pas de limite en $a = 2$.

Ce critère est presque toujours applicable en pratique. Mais il faut parfois revenir au théorème précédent pour prouver qu'une fonction n'a pas de limite en un réel donné.

Contre-Exemple 3 : Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'a pas de limite en 0, mais admet des limites à droite et à gauche en 0, que vous préciserez.

Théorème 2 : Supposons que f est définie en a. Alors :
$[\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ **et** $\ell = f(a)]$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Exemple 2 : Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

admet 0 pour limite lorsque x tend vers 0.

1.2 Limite infinie en un réel a - asymptote verticale

Exemple introductif :

1. Commençons par un exemple classique : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
   a) Calculez $f(0,5),\ f(0,1),\ f(0,01),\ f(10^{-4}),\ f(10^{-6})$. Vers quelle valeur semble se rapprocher $f(x)$ lorsque x tend vers 0 en restant positif ?
   b) Même question avec $f(-0,5),\ f(-0,1),\ f(-0,01),\ f(-10^{-4}),\ f(-10^{-6})$. Vers quelle valeur semble se rapprocher $f(x)$ lorsque x tend vers 0 en restant négatif ?
   c) Conclure : Vers quelle valeur semble se rapprocher $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ?

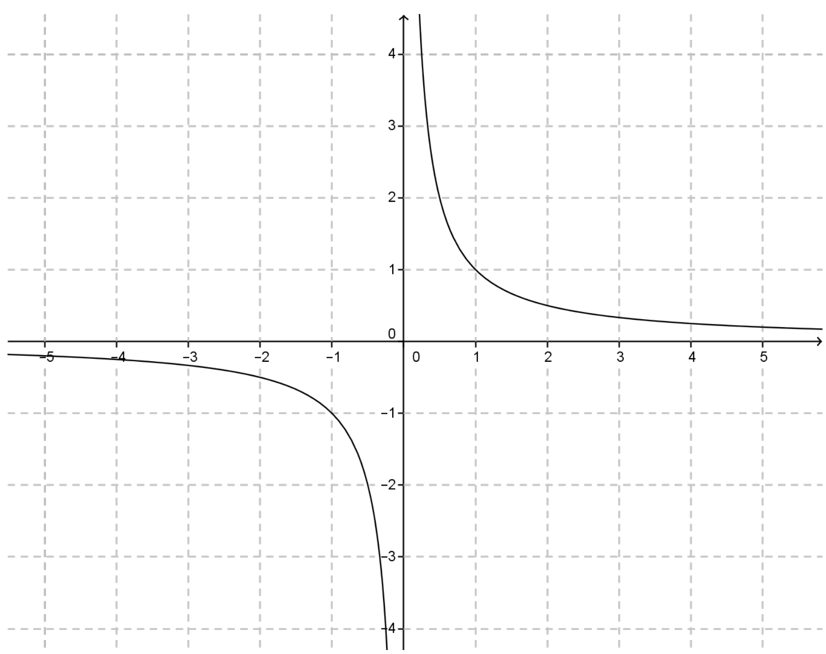
2. Continuons avec un autre exemple toujours aussi classique : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   a) Calculez $f(0,5),\ f(0,1),\ f(0,01),\ f(10^{-4}),\ f(10^{-6})$. Vers quelle valeur semble se rapprocher $f(x)$ lorsque x tend vers 0 en restant positif ?
   b) Même question avec $f(-0,5),\ f(-0,1),\ f(-0,01),\ f(-10^{-4}),\ f(-10^{-6})$. Vers quelle valeur semble se rapprocher $f(x)$ lorsque x tend vers 0 en restant négatif ?
   c) Conclure.

Définition 3 : Soit a un point adhérent à D. On dit que la fonction f définie sur D admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $\underline{a \in \mathbb{R} \setminus D}$, et on note $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty}$ si pour tout réel $A > 0$ on peut trouver un intervalle ouvert V centré en a tel que pour tout réel x appartenant à $V \cap D$, on a $f(x) > A$.
Formellement : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D), |x - a| < \alpha \implies f(x) > A$.

Remarque : on définirait de même :

1. $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
2. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Définition 4 : Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.



La droite D d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f ci-dessus.

Point technique : **Les valeurs de x où l'on doit chercher les asymptotes verticales sont les "bords" de l'ensemble de définition de f, aux valeurs interdites.**

Exercice 3 : Justifier que les fonctions suivantes ont une ou plusieurs asymptotes verticales, dont vous donnerez l'équation.

1. $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$
2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$
3. $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$

Synthèse partielle :

2 Limite d'une fonction quand x tend vers l'infini

On suppose que l'ensemble de définition D de f contient un intervalle de la forme $[B; +\infty[$ ou bien $]-\infty; B]$, $B \in \mathbb{R}$.

2.1 Limite finie en $\pm\infty$ - asymptote horizontale

Définition 5 : On dit que la fonction f définie sur D admet pour limite le réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, et on note $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell}$ si pour tout intervalle ouvert $W =]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ centré en ℓ on peut trouver un réel A tel que pour tout réel x appartenant à $]A; +\infty[\cap D$, on a $f(x) \in W$.
Formellement : $(\forall \epsilon > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in D), x > A \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$.

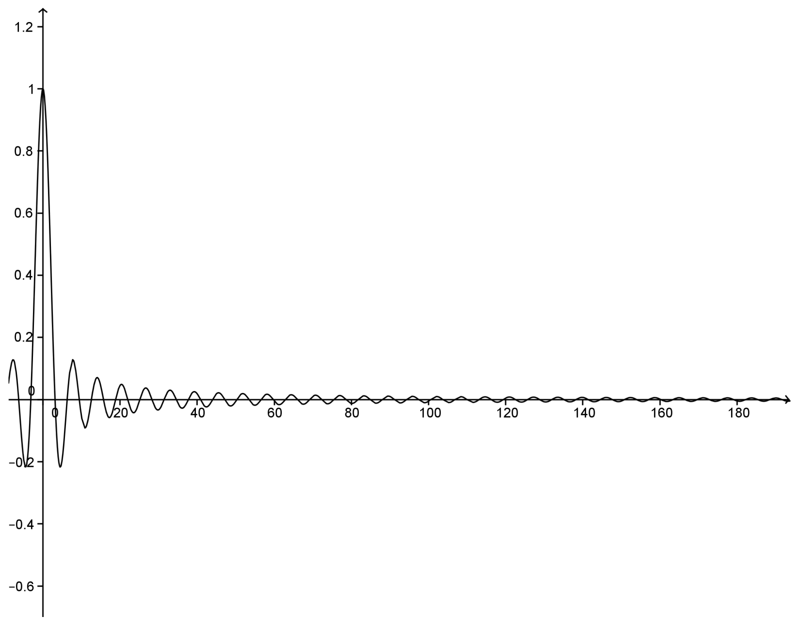
Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.
2. Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Alors on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

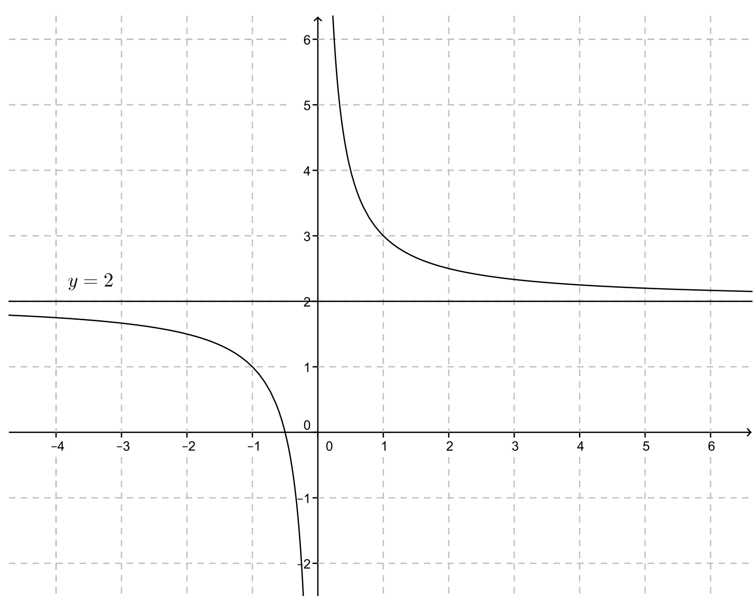
Définition 6 : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors on dit que la courbe représentative de f a pour **asymptote horizontale** la droite d'équation $y = \ell$ en $+\infty$. Même chose en $-\infty$.

Point technique : **Pour justifier la présence d'une asymptote horizontale en $+\infty$ / en $-\infty$, on prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ / $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, où ℓ est un réel fini.**

Ici, la courbe représentative de f coupe (une infinité de fois) son asymptote horizontale :



Mais pas là...



Exercice 4 : Justifier que toutes les courbes représentatives des fonctions définies à l'exercice 3 ont pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{3x^2 + x + 1}$.
Justifiez que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f a une asymptote horizontale en $\pm\infty$ dont vous donnerez l'équation. Étudiez la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote.

2.2 Limite infinie en $\pm\infty$

Définition 7 : On dit que la fonction f définie sur D admet $+\infty$ pour limite lorsque x tend vers $+\infty$, et on note $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ si pour tout réel $B > 0$ on peut trouver un réel A tel que pour tout réel x appartenant à $]A; +\infty[\cap D$, on a $f(x) > B$.
Formellement, $(\forall B > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in D), x > A \implies f(x) > B$.

On définit de même les autres cas :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Alors on a $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
2. Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x + 3}$. Alors on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3 Opérations sur les limites

3.1 Manipulations algébriques

Ce sont les mêmes que celles vues dans le chapitre sur les suites. On retiendra donc en particulier les quatre formes indéterminées :

$$\boxed{+\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0}}$$

Remarque : Dans le cas d'un quotient de deux fonctions polynômes (fonction rationnelle) $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, on retiendra en particulier pour étudier les limites en $\pm\infty$ de mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur. Ainsi, si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_0$ et si $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_0$, alors en $\pm\infty$, $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se comporte comme $G(x) = \dfrac{a_n}{b_p}x^{n-p}$.

On admettra le :

Théorème 3 : Soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_0$ et $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_0$ deux fonctions polynomes. Posons $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n}{b_p}x^{n-p}$.

3.2 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

Théorème 4 (de comparaison) : On suppose que l'ensemble de définition des fonctions considérées contient un intervalle I de la forme $]A;+\infty[$. Soient f, g deux fonctions.

1. Si pour tout réel $x \in I$, $g(x) \leq f(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Si pour tout réel $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Nous laissons le lecteur adapter ce théorème au cas où x tende vers $-\infty$ ou même vers un réel a adhérent à $D_f \cap D_g$.

Théorème 5 (d'encadrement) : On suppose que l'ensemble de définition des fonctions considérées contient un intervalle I de la forme $]A; +\infty[$.
Soient f, g et h trois fonctions. On suppose que pour tout réel $x \in I,\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$.
Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Nous laissons le lecteur adapter ce théorème au cas où x tende vers $-\infty$ ou même vers un réel a adhérent à $D_f \cap D_g \cap D_h$.

Théorème 6 (croissance comparée) : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

Exemples : Déterminer la limite des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{3x + 2\cos x}{-5x + 2}$ en $-\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{x^2 e^{-x} + x^3 + 1}{3x + 2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^3} - xe^x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.