Feuille d'exercices

Prof : Yannick Le Bastard Classe : Terminale spé maths Année : 2023-2024

Rappels de cours : Limite d'une fonction - continuité en un point.

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$, a un réel adhérent à D : $\forall\alpha > 0,\ ]a-\alpha; a+\alpha[\cap D \neq \emptyset$ ou $\pm\infty$, et ℓ un réel.

Définitions 0 :

1. Cas où $a \in \mathbb{R}$: On dit que f a pour limite $+\infty$ (ou encore que $f(x)$ tend vers $+\infty$) lorsque x tend vers a si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap D$, $f(x) > A$.
   Formellement :
   $$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap D), x \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap D \implies f(x) > A$$
   On écrit $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$.
2. Cas où $a = +\infty$: On dit que f a pour limite $+\infty$ (ou encore que $f(x)$ tend vers $+\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout $x > B$, $f(x) > A$.
   Formellement :
   $$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in]B; +\infty[\cap D), x \in]B; +\infty[\cap D \implies f(x) > A$$
   On écrit $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$.
3. Cas où $a \in \mathbb{R}$: On dit que f a pour limite ℓ (ou encore que $f(x)$ tend vers ℓ) lorsque x tend vers a si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap D$, $f(x) \in]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[$.
   Formellement :
   $$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap D), x \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap D \implies f(x) \in]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[$$
   On écrit $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell}$.
4. Cas où $a = +\infty$: On dit que f a pour limite ℓ (ou encore que $f(x)$ tend vers ℓ) lorsque x tend vers $+\infty$ si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B; +\infty[\cap D$, $f(x) \in]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[$.
   Formellement :
   $$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in]B; +\infty[\cap D), x \in]B; +\infty[\cap D \implies f(x) \in]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[$$
   On écrit $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell}$.

Nous laissons le lecteur traiter les autres cas (que x tende vers $-\infty$ et/ou $f(x)$ tende vers $-\infty$).

Théorème-définition 1 : Si une fonction f admet une limite en un réel a ou en $\pm\infty$, alors celle-ci est unique. On peut alors parler de **LA** limite de la fonction f.

Limites à droite et à gauche en un réel a : **ATTENTION**, Toutes les fonctions n'ont pas de limite. Par exemple la fonction inverse définie sur $D = \mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1/x$, n'a pas de limite en 0.
En revanche, si l'on restreint son ensemble de définition D à $]-\infty; 0[$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.
On écrit $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.
De même, en restreignant D à $]0; +\infty[$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$. On écrit $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Définitions et théorème 2 : Soit f une fonction définie sur un ensemble D, a un réel adhérent à D et $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = \pm\infty$.

1. On dit que f a pour **limite à gauche** ℓ en a si la restriction de f à $]-\infty; a[\cap D$ admet ℓ pour limite i.e si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell$. On écrit $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell}$

2. On dit que f a pour **limite à droite** ℓ si la restriction de f à $]a; +\infty[\cap D$ admet ℓ pour limite i.e si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$. On écrit $\boxed{\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell}$

Si elles existent les limites à gauche et à droite d'une fonction f en un réel a sont uniques.

Remarque : Le fait que f soit définie ou PAS en a change la donne. En effet :

Théorème 3 (valeur de la limite en $a \notin D$) : Soit f est une fonction définie sur D et $\underline{a \notin D}$ (donc $f(a)$ n'existe pas). Alors :

1. Si f a une limite ℓ en a (finie ou pas), alors f a une limite à gauche et à droite en a et elles sont égales à ℓ : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

2. Réciproquement, si f a une limite à gauche et à droite en a qui sont égales à ℓ, alors f a une limite en a égale à ℓ.

Si f n'est pas définie en a et que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, alors f n'a pas de limite en a.

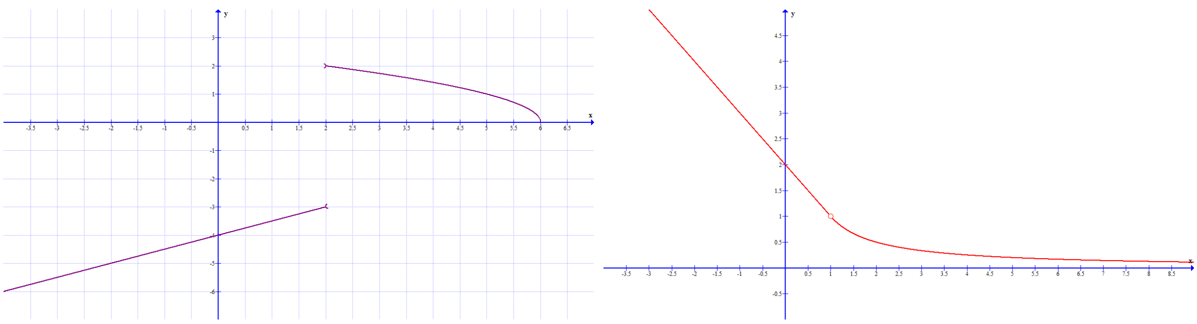


Figure 1: Pas de limite en 2 (image de gauche) mais une limite en 1 (image de droite)

Théorème 4 (valeur de la limite en $a \in D$) : Soit f est une fonction définie sur D et $\underline{a \in D}$ (donc $f(a)$ existe).

1. Si f a une limite ℓ en a, on a $\ell = f(a)$.
2. Caractérisation avec les limites à droite et à gauche :
$[\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ **et** $\ell = f(a)]$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

En particulier, si f est définie en a et que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou que $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) \neq f(a)$, alors f n'a pas de limite en a.

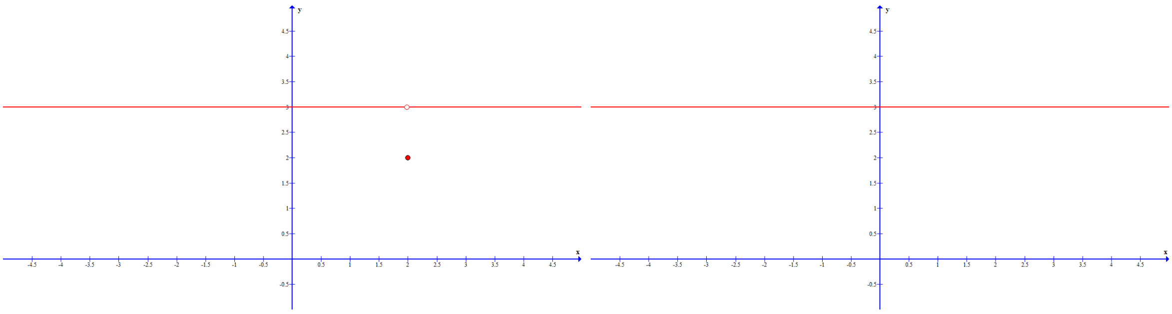


Figure 2: Pas de limite en 2 (image de gauche) mais une limite en 2 (image de droite)

Définition 5 (continuité en a) : Soit f est une fonction définie sur D et $\underline{a \in D}$. On dit que f est continue en a si la limite ℓ de f en a existe. En vertu du théorème 4, on sait qu'alors nécessairement $\ell = f(a)$. On retiendra la définition redondante suivante :

$$f \text{ est } \textbf{\textit{continue en }} a \text{ si et seulement si } \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Définition 5 (continuité à gauche et à droite en a) : Soit f est une fonction définie sur D et $\underline{a \in D}$.

1. On dit que f est **continue à gauche** en a si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$
2. On dit que f est **continue à droite** en a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

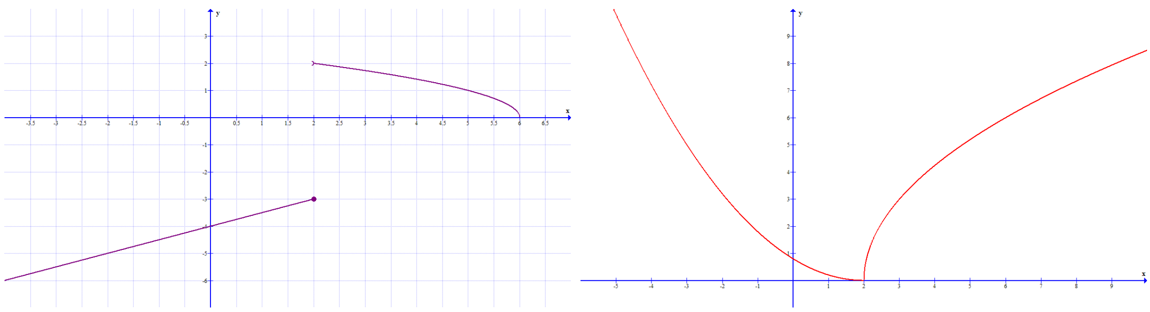


Figure 3: Pas continue en 2 (image de gauche) mais continue en 2 (image de droite)

Exercice n°1

Cet exercice abstrait est destiné à travailler la définition de limite. Il s'adresse à tous ceux qui souhaitent progresser en rigueur et affiner leur compréhension des définitions formelles.

1. En revenant à la définition de la limite, prouvez que :

   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
   - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = 0$.
   - $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$. Donnez un contre-exemple si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$.
   - Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   - La fonction inverse n'a pas de limite en 0 (mais une limite à droite et à gauche).
   - Pour tout réel a, $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$
   - Théorème de comparaison : on suppose qu'au voisinage de a (fini ou infini), $f(x) \leq g(x)$ et que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
   - Théorème d'encadrement : Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose qu'au voisinage de a (fini ou infini) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
   - Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D et a un réel adhérent à D. Si f est bornée et g a pour limite 0 en a, alors fg a pour limite 0 en a.
   - Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est bornée au voisinage de a.

2. On se propose de prouver que les fonctions de terme général $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ n'ont pas de limite en $+\infty$. Par l'absurde, supposons que f converge vers un certain réel ℓ en $+\infty$.

   - Exprimer $\sin(x+1)$ en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$ puis en déduire en faisant tendre x vers $+\infty$ que la fonction g tend vers une limite que l'on précisera quand x tend vers $+\infty$.
   - En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, justifier que $\ell \neq 0$.
   - Exprimer $\sin(2x)$ en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$, puis aboutir à une contradiction.

Rappel : pour tous réels a et b, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, en particulier $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Exercice n°2

1. Étudier la limite en 0 de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. Que peut-on dire de la continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$?

Exercice n°3

VRAI ou FAUX ?

1. La somme de deux fonctions discontinues en un réel a est discontinue en a.

2. La somme d'une fonction qui n'a pas de limite en a et d'une fonction qui a une limite en a n'a pas de limite en a.

3. Une fonction f telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ est croissante si x est suffisamment grand.

4. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$, alors f ou g est bornée.

5. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^4+1} - x^2$ a une limite finie quand x tend vers $-\infty$.

Rappels de cours : Opérations algébriques sur les limites.
Dans tout ce qui suit, f et g désignent des suite à termes réels, ℓ et ℓ' sont deux nombres réels, et a un réel ou $\pm\infty$.

Somme et limites

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	??

Explicitons le cas de la **forme indéterminée** $+\infty - \infty$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ en posant $f(x) = x + \ell$ et $g(x) = -x$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$ en posant $f(x) = 2x$ et $g(x) = -x$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite en posant $f(x) = x + \cos x$ et $g(x) = -x$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (par comparaison), $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, mais $(f(x)+g(x)) = \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Produit et limites

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	$\ell\ell'$	∞	??

Explicitons le cas de la **forme indéterminée** $\infty \times \mathbf{0}$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ en posant $f(x) = \dfrac{\ell}{x}$ et $g(x) = x$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = \ell$.

- On peut obtenir $\pm\infty$ en posant $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$.

- On peut ne pas obtenir de limite en posant $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = x$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (par encadrement), $\lim\limits_{x\to g(x)} g(x) = +\infty$, mais $f(x)g(x) = \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Remarquons que le produit d'une constante réelle k par le terme général f d'une fonction ne pose aucun problème : si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\ell$.
Si $k \neq 0$ et si la limite de **f** est infinie, il s'agit d'appliquer la règle des signes. Et si $k = 0$??? Nous n'osons pas insulter l'intelligence du lecteur avec ce cas !

Inverse et limites

			$f(x) > 0$ **avd** a	$f(x) < 0$ **avd** a	sinon
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	??

Conjuguant les tableaux des produit et inverse, on obtient celui des quotients :

Quotient et limites

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	ℓ ou ∞	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0 avec g de signe constant	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	??	??

Retenons donc les quatre formes indéterminées au programme du secondaire :

$$\boxed{+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}}$$

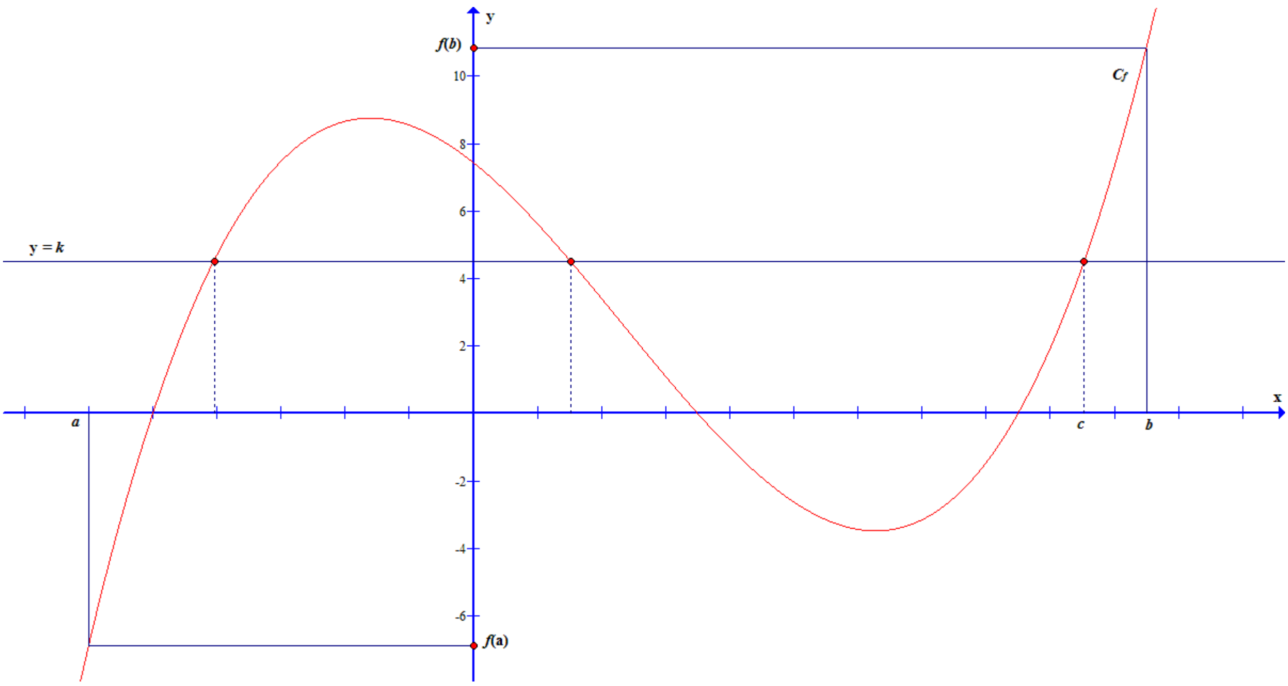
Signalons enfin un **résultat très utile de composition** que nous utilisons fréquemment dans le cadre des fonctions continues.

Théorème 6 (suites et fonctions) : Soit $\mathbf{u}$ une suite réelle à valeurs dans un intervalle I et soit f une fonction définie sur I. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Point technique : Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes de degrés respectifs p et q : $P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots a_0$ et $Q(x) = b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_0$. Alors : f et g définie par $g(x) = \dfrac{a_p}{b_q}x^{p-q}$ ont la même limite en $\pm\infty$. On peut même préciser :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} \pm\infty \text{ si } p > q \\ 0 \text{ si } p < q \\ \dfrac{a_p}{b_q} \text{ si p=q} \end{cases}$$

Théorème des valeurs intermédiaires sur un segment $[a;b]$: Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. A lors pour tout réel $k \in [f(a);f(b)]$ il existe (au moins) un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.



Remarque : le réel c n'est pas forcément unique. Dans le graphique précédent, on remarque aisément que k a trois antécédents par f. Il s'agit donc d'un *théorème d'existence*. On peut le traduire de la manière suivante : Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c dans $[a;b]$.
Moyennant quelques hypothèses supplémentaires, on peut obtenir l'*unicité* d'une telle solution.

TVI strictement monotone : Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle $[a;b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **UNIQUE** réel x appartenant à $[a;b]$ tel que $f(x)=k$.

Corollaire très utile : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$. Si $f(a)f(b)<0$, il existe un unique réel $c\in[a;b]$ tel que $f(c)=0$.

Par translation, on peut toujours utiliser le TVI strictement monotone sous la forme de son corollaire, qui est donc le plus utilisé en pratique.

Remarque importante : Les théorèmes des valeurs intermédiaires et TVI strictement monotone s'étendent aisément au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non. Les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ sont alors remplacées par des limites.
Par exemple, si f est une fonction continue sur $[a;b[$, le TVI s'énonce ainsi :

TVI : Pour tout réel $k\in[f(a);\lim\limits_{x\to b}f(x)[$ (ou $k\in]\lim\limits_{x\to b}f(x);f(a)]$), il existe au moins un réel $c\in[a;b[$ tel que $f(x)=k$; avec unicité si f est strictement monotone.

Exercice n°4

QCM : chaque item a une ou plusieurs bonnes réponses.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ si } x<0\\ x-1 \text{ si } x>0\end{cases}$. Alors :
   (a) f a une limite en 0 (b) f n'a pas de limite en 0 (c) f est continue en 0 (d) f a une limite à gauche en 0 (e) f a une limite à droite en 0

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ si } x<0\\ x-1 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$. Alors :
   (a) f a une limite en 0 (b) f n'a pas de limite en 0 (c) f est continue en 0 (d) f est continue à gauche en 0 (e) f est continue à droite en 0

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3x^2}}{2x}$. Alors :
   (a) f a une limite en finie en 0 (b) f n'a pas de limite en 0 (c) f a une limite infinie en 0 (d) f a une limite finie en $+\infty$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x+x-2$. Alors l'équation $f(x)=4$ a :
   (a) une unique solution (b) deux solutions (c) trois solutions (d) aucune solution

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0,5e^{x^2}-e^{2x}+1$. Alors l'équation $f(x)=0$ a : (a) une unique solution (b) deux solutions (c) trois solutions (d) aucune solution

Exercice n°5

Déterminez les limites (resp. limites à gauche, à droite), si elles existent, des fonctions de terme général (vous préciserez les éventuelles asymptotes verticales/horizontales) :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ en 4.
2. $f(x) = \dfrac{-3x^2+6x+1}{15x+3}$ en $+\infty$ et en $-1/5$.
3. $f(x) = \dfrac{5x^2+11}{x^3+2x^2+3}$ en $+\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{-5x^2+3\sin x-1}{2x^2+9\cos x+2}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = \dfrac{3\cos(e^x)}{x^2}$ en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.
6. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{3x^2+2}}{8x^2-1}$ en $+\infty$ et en $\sqrt{2}/4$.
7. $f(x) = \dfrac{4x+e^{-2x}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$.
8. $f(x) = \sqrt{2x^2+x-3} - \sqrt{2x^2+1}$ en $+\infty$.
9. $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ en 2.
10. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x}$ en $+\infty$.
11. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}(\sqrt{x^6+2} - \sqrt{x^6+1})$ en $+\infty$.
12. $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ en 2.
13. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x - 1}{1+\cos x}$ en π.
14. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x^2+2x|}$ en 0.
15. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}} \text{ si } |x|>1 \\ x^2-3x+2 \text{ si } |x|<1 \end{cases}$ en 1.

Exercice n°6

On admet les résultats classiques suivants :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^k} = 0$ $(k \geq 1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^k} = +\infty$ $(k \geq 0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 0$.

Déterminer les limites en $\pm\infty$, si elles existent, des fonctions de terme général :

1. a) $f(x) = 3x^2 - 10x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^3 + 5x^2 + 1}$ c) $f(x) = \dfrac{3 - \ln x}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = e^{x^2 - x^3}$ e) $f(x) = \dfrac{6x^2 - 1}{3x + 12}$ f) $f(x) = \dfrac{5 + 3\sin x}{x^3}$ g) $f(x) = e^{x^2 - 2x} - e^{x^2 + 2}$.
2. a) $f(x) = x^{10}e^{-x}$ b) $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x}$ c) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \dfrac{e^{-kx}}{x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^{20}}$
3. a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en 0 b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 0 \\ e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ en 0

Exercice n°7

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f([a;b]) \subset [a;b]$ i.e telle que si $x \in [a;b]$, alors $f(x) \in [a;b]$ (on dit que l'intervalle $[a;b]$ est stable par f).
Prouver qu'il existe (au moins) un réel $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = x$.
Indication : on introduira la fonction g définie sur $[a;b]$ par $g(x) = f(x) - x$.

Exercice n°8

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{23}{4}x + 5$.

1. Calculez $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. Calculez $g'(x)$, étudiez son signe et en déduire les variations de g. Dressez le tableau de variations de g en indiquant les valeurs exactes des extrema (minimum ou maximum) locaux sous la forme $g(x_i)$. Vous en donnerez une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Démontrez que l'équation $g(x) = 6$ a exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$ et donnez un encadrement à 10^{-2} près de chacune d'entre elles.
4. Donnez les réels k tel que l'équation $g(x) = k$ ait exactement deux solutions. Justifiez.

Exercice n°9

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. **étude d'une fonction auxiliaire**

   (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.
   Etudiez le sens de variation de la fonction g.

   (b) Démontrez qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Démontrez que a appartient à l'intervalle [0,703 ; 0,704[.

   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **étude de la fonction** $\boldsymbol{f}$

   (a) Déterminez les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   (b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrez que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   (d) Démontrez que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

   (e) Justifiez que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice n°10

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - x$.

   (a) Déterminez les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   (b) Montrez que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Montrez qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n :

   $u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

   On a représenté en **annexe** la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.

   (a) Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   (b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?
   Aucune justification n'est demandée.

      a) Conjecture 1 : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
      b) Conjecture 2 : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$.
      c) Conjecture 3 : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

   (c) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.

   Montrez que $\ln\left(1 + \dfrac{1}{\ell}\right) = \ell$.

   (d) Montrer que $\ell = \alpha$.

ANNEXE