Limite d'une fonction

Approche intuitive et théorique
épisode 4 : limite finie en un réel
Terminale spécialité maths

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

January 16, 2024


Bienvenue sur les
sentiers
mathématiques !

AVERTISSEMENT

Don't be afraid !

Le contenu de ce chapitre est plus théorique que ce que nous avons rencontré jusqu'ici.

Bien qu'il soit conforme au programme de Terminale spécialité Maths, il fait la jonction avec un type d'approche que vous serez amenés à pratiquer dans l'enseignement supérieur.

Nous travaillerons donc essentiellement l'aspect pratique comme déjà fait en classe et plus dans l'esprit des épreuves du baccalauréat.

Cependant, vous apesantir un peu, crayon en main, sur les notions présentées ici, vous permettra d'acquérir de la maturité mathématique et vous donnera un avantage certain pour l'an prochain !

Point adhérent - voisinage d'un point

Point adhérent à un ensemble :
Soit $D \subset \mathbb{R}$. On dit que le réel a est **adhérent** à l'ensemble D si pour tout intervalle ouvert de centre a : $]a-\alpha; a+\alpha[$, on a $\underline{]a-\alpha; a+\alpha[\cap D \neq \emptyset}$.

Point adhérent - voisinage d'un point

Point adhérent à un ensemble :
Soit $D \subset \mathbb{R}$. On dit que le réel a est **adhérent** à l'ensemble D si pour tout intervalle ouvert de centre a : $]a-\alpha; a+\alpha[$, on a $\underline{]a-\alpha; a+\alpha[\cap D \neq \emptyset}$.

Par exemple, 2 est adhérent à l'ensemble $D =]2; +\infty[$ car pour tout réel $\alpha > 0$, $]2-\alpha; 2+\alpha[\cap]2; +\infty[=]2; 2+\alpha[\neq \emptyset$: 2 est un "**bord**" de D.

Point adhérent - voisinage d'un point

Point adhérent à un ensemble :

Soit $D \subset \mathbb{R}$. On dit que le réel a est **adhérent** à l'ensemble D si pour tout intervalle ouvert de centre a : $]a-\alpha; a+\alpha[$, on a $\underline{]a-\alpha; a+\alpha[\cap D \neq \emptyset}$.

Par exemple, 2 est adhérent à l'ensemble $D =]2; +\infty[$ car pour tout réel $\alpha > 0$, $]2-\alpha; 2+\alpha[\cap]2; +\infty[=]2; 2+\alpha[\neq \emptyset$: 2 est un "**bord**" de D.

Autre exemple : 0, 1 et 3 sont adhérents à $D =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]3; +\infty[$.

Voisinage d'un réel a :

On dit qu'un ensemble V est un **voisinage** du réel a s'il existe un intervalle ouvert de centre a : $]a-\alpha; a+\alpha[$ inclus dans V.

Point adhérent - voisinage d'un point

Point adhérent à un ensemble :

Soit $D \subset \mathbb{R}$. On dit que le réel a est **adhérent** à l'ensemble D si pour tout intervalle ouvert de centre a : $]a-\alpha; a+\alpha[$, on a $\underline{]a-\alpha; a+\alpha[\cap D \neq \emptyset}$.

Par exemple, 2 est adhérent à l'ensemble $D =]2; +\infty[$ car pour tout réel $\alpha > 0$, $]2-\alpha; 2+\alpha[\cap]2; +\infty[=]2; 2+\alpha[\neq \emptyset$: 2 est un "**bord**" de D.

Autre exemple : 0, 1 et 3 sont adhérents à $D =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]3; +\infty[$.

Voisinage d'un réel a :

On dit qu'un ensemble V est un **voisinage** du réel a s'il existe un intervalle ouvert de centre a : $]a-\alpha; a+\alpha[$ inclus dans V.

Par exemple, $V = [0,9; 2]$ est un voisinage de 1 dans $D = [0; +\infty[$.

$V = [2; 2,1[$ est un <u>voisinage à droite</u> de 2 dans $D = [2; +\infty[$.

Définition 2 : On dit que la fonction f définie sur D admet pour **limite** le réel ℓ lorsque x tend vers <u>a adhérent à D</u>, et on note $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell}$ si pour tout intervalle ouvert $W =]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ centré en ℓ on peut trouver un intervalle ouvert $V =]a - \alpha; a + \alpha[$ centré en a tel que pour tout réel x appartenant à $V \cap D$, on a $f(x) \in W$:

Formellement : $(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D \cap]a - \alpha; a + \alpha[), |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Définition 2 : On dit que la fonction f définie sur D admet pour **limite** le réel ℓ lorsque x tend vers <u>a adhérent à D</u>, et on note $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell}$ si pour tout intervalle ouvert $W =]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ centré en ℓ on peut trouver un intervalle ouvert $V =]a - \alpha; a + \alpha[$ centré en a tel que pour tout réel x appartenant à $V \cap D$, on a $f(x) \in W$:

Formellement : $(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D \cap]a - \alpha; a + \alpha[), |f(x) - \ell| < \epsilon.$

Heuristiquement : $f(x)$ est aussi *proche* de ℓ que souhaité pourvu que x soit assez proche de a.

Définition 2 : On dit que la fonction f définie sur D admet pour **limite** le réel ℓ lorsque x tend vers a adhérent à D, et on note $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell}$ si pour tout intervalle ouvert $W =]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ centré en ℓ on peut trouver un intervalle ouvert $V =]a - \alpha; a + \alpha[$ centré en a tel que pour tout réel x appartenant à $V \cap D$, on a $f(x) \in W$:

Formellement : $(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D \cap]a - \alpha; a + \alpha[), |f(x) - \ell| < \epsilon.$

Heuristiquement : $f(x)$ est aussi *proche* de ℓ que souhaité pourvu que x soit assez proche de a.

Remarque : Notons que le réel a n'est pas censé appartenir à l'ensemble de définition D de la fonction f : on lui impose juste d'être adhérent à D. Dans la pratique, ce sera un des "bords" (*point frontière*) de l'ensemble de définition D de f.

limite finie d'une fonction en un réel a

1. Cas où a n'appartient pas à l'ensemble de définition D de f :

Dire que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ se traduit alors par :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D \cap]a - \alpha ; a + \alpha[\setminus \{a\}), |f(x) - \ell| < \epsilon$$

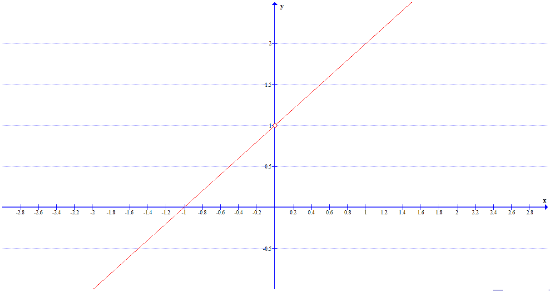
1. Cas où a n'appartient pas à l'ensemble de définition D de f :

Dire que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ se traduit alors par :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D \cap]a - \alpha ; a + \alpha[\setminus \{a\}), |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Mais pourquoi distinguer le cas où a appartient à l'ensemble de définition D de f ? Voyons un exemple.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 1$ i.e $f(x) = x + 1$ partout sauf en $x = 0$ où elle n'est pas définie : $f(0)$ n'existe pas.

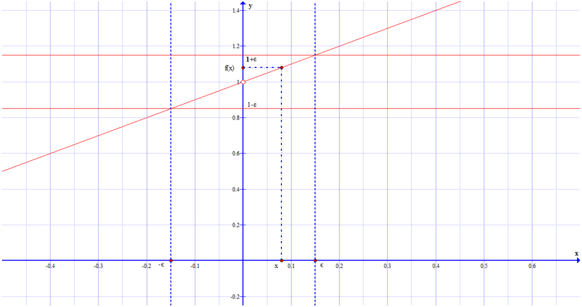


limite finie d'une fonction en un réel a

Intuitivement, quand x tend vers 0, que ce soit par valeurs supérieures $(x \to 0,\ x > 0)$, ce que l'on notera $x \to 0^+$ ou par valeurs inférieures $(x \to 0,\ x < 0)$, ce que l'on notera $x \to 0^-$, $f(x)$ se rapproche de $\ell = 1$.

Intuitivement, quand x tend vers 0, que ce soit par valeurs supérieures ($x \to 0,\ x > 0$), ce que l'on notera $x \to 0^+$ ou par valeurs inférieures ($x \to 0,\ x < 0$), ce que l'on notera $x \to 0^-$, $f(x)$ se rapproche de $\ell = 1$.

Pour revenir à la définition, si l'on se donne une "bande de sécurité de largeur $\epsilon > 0$ autour de $\ell = 1$ en ordonnée (ϵ destiné à devenir aussi petit que l'on veut), on peut toujours trouver un réel $\alpha > 0$ tel que si $x \in]0 - \alpha; 0 + \alpha[\setminus\{0\}$, alors $f(x) \in]1 - \epsilon; 1 + \epsilon[$ ($\alpha = \epsilon$ convient ici).

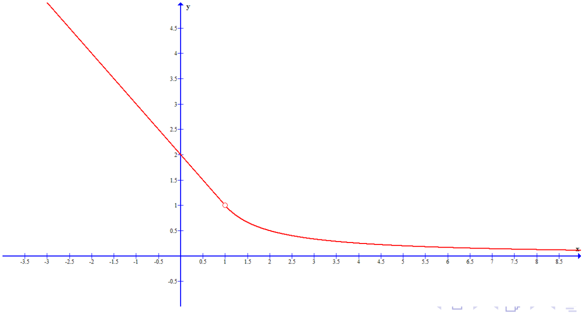


limite finie d'une fonction en un réel a

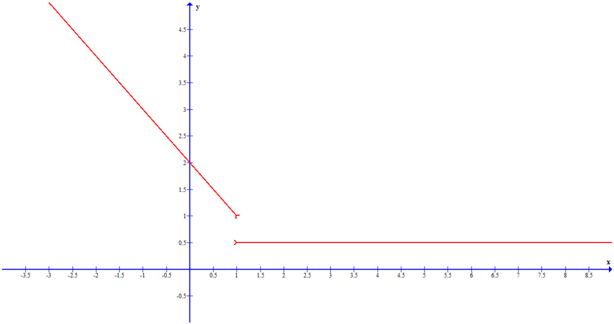
Il n'est pas toujours facile de trouver numériquement cet α dépendant du ϵ. Vous apprendrez comment faire dans des cas simples après le bac.
En revanche, cela est souvent possible graphiquement.
Par exemple, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 \text{ si } \; x < 1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ (prendre $\epsilon = 0,5$ puis 0,25 par exemple)

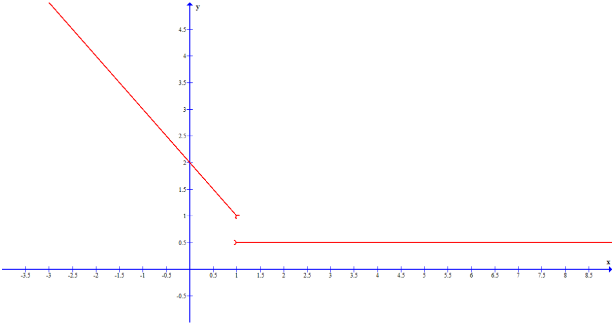


La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2 \text{ si } & x<1 \\ 0,5 \text{ si } x>1 \end{cases}$ n'a pas de limite en $a = 1$.



limite finie d'une fonction en un réel a

La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} -x + 2 \text{ si } & x < 1 \\ 0,5 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ n'a pas de limite en $a = 1$.



En revanche, on a bien envie de dire que si x tend vers 1 par valeurs inférieures, $f(x)$ tend vers 1, alors que si x tend vers 1 par valeurs supérieures, $f(x)$ tend vers 0,5.

limite à gauche et à droite d'une fonction en un réel a

Définition 3 : Soit f une fonction définie sur D et a un réel adhérent à D. On dit que le réel ℓ est **limite à gauche** (resp. **à droite**) de f en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout réel x appartenant à $D \cap]a-\alpha; a[$ (resp. à $D \cap]a; a+\alpha[$), on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$).

Définition 3 : Soit f une fonction définie sur D et a un réel adhérent à D. On dit que le réel ℓ est **limite à gauche** (resp. **à droite**) de f en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout réel x appartenant à $D\cap]a-\alpha; a[$ (resp. à $D\cap]a; a+\alpha[$), on a $|f(x)-\ell| < \epsilon$.
On note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$).

Remarquons que les réels x considérés appartiennent à D et sont tous **strictement inférieurs** à a ou **strictement supérieurs** à a (même si f est définie en a !)

Définition 3 : Soit f une fonction définie sur D et a un réel adhérent à D. On dit que le réel ℓ est **limite à gauche** (resp. **à droite**) de f en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout réel x appartenant à $D \cap]a - \alpha; a[$ (resp. à $D \cap]a; a + \alpha[$), on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$).

Remarquons que les réels x considérés appartiennent à D et sont tous <u>**strictement inférieurs** à a ou **strictement supérieurs** à a</u> (même si f est définie en a !)

Vous devrez donc **TOUJOURS** considérer les limites à gauche / à droite d'une fonction f en un réel a adhérent à D quand x tend vers a en étant **différent de** a.

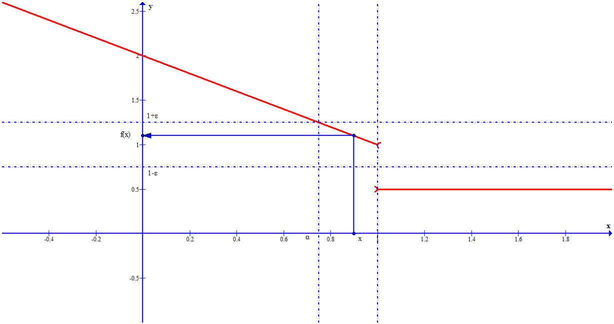
limite à gauche et à droite d'une fonction en un réel a

Reprenons l'exemple précédent : la fonction f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} -x + 2 \text{ si } & x < 1 \\ 0,5 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ $\underline{f \text{ n'a pas de limite en } a = 1}$.

limite à gauche et à droite d'une fonction en un réel a

Reprenons l'exemple précédent : la fonction f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2 \text{ si } & x < 1 \\ 0,5 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ <u>f n'a pas de limite en $a = 1$</u>.

En revanche, donnons-nous un réel $\epsilon > 0$ quelconque. Alors si l'on pose $\alpha = 1 - \epsilon$ (unique antécédent de $1 + \epsilon$ par f) si $x \in]\alpha, 1[$, on a $f(x) \in]1 - \epsilon; 1 + \epsilon[$. Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$.



limite à gauche et à droite d'une fonction en un réel a

Un premier critère de non-existence d'une limite

Soit f une fonction de domaine de définition D et a un réel adhérent à D.
Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, alors f n'a pas de limite en a.

Un premier critère de non-existence d'une limite

Soit f une fonction de domaine de définition D et a un réel adhérent à D.
Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, alors f n'a pas de limite en a.

Un critère séquentiel de non-existence d'une limite

Soit f une fonction de domaine de définition D et a un réel adhérent à D.

- S'il existe une suite (x_n) d'éléments de D convergeant vers a,
- S'il existe une suite (y_n) d'éléments de D convergeant vers a,
- Mais que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n)$

Alors f n'a pas de limite en a.

limite à gauche et à droite d'une fonction en un réel a

Deux fonctions sans limite : énoncé

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+3 \text{ si } & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 1 & \end{cases}$.

   Alors f n'a pas de limite en $x = 1$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Alors f n'a pas de limite en $x = 0$.

Deux fonctions sans limite : solution

1. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1$. Donc f n'a pas de limite en $x = 1$.
2. C'est plus délicat. Nous savons en effet que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$. Or lorsque x tend vers $0^{\pm}$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $\pm\infty$.

Deux fonctions sans limite : solution (suite)

Dans ce cas, le critère séquentiel s'avère très utile !

Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\cos(2n\pi) = 1$, $\sin(2n\pi) = 0$ et $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2}$.

(x_n) et (y_n) tendent vers 0 **mais** $f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1 \longrightarrow 1$ et
$f(y_n) = \cos(2n\pi + \pi/2) = -\sin(2n\pi) = 0 \longrightarrow 0$.

Ainsi, d'après le critère séquentiel de NON existence d'une limite, f n'a pas de limite en 0.

2. Cas où a appartient à l'ensemble de définition D de f :

Rappelons que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ se traduit par :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D \cap]a - \alpha; a + \alpha[), |f(x) - \ell| < \epsilon$$

2. Cas où a appartient à l'ensemble de définition D de f :

Rappelons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ se traduit par :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D \cap]a - \alpha; a + \alpha[), |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Deux Théorèmes

Théorème 1 : Si $a \in D$ et que f a une limite ℓ en a, alors nécessairement $\ell = f(a)$.

2. Cas où a appartient à l'ensemble de définition D de f :

Rappelons que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ se traduit par :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D \cap]a - \alpha; a + \alpha[), |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Deux Théorèmes

Théorème 1 : Si $a \in D$ et que f a une limite ℓ en a, alors nécessairement $\ell = f(a)$.

Théorème 2 : Soit $a \in D$. Alors f a une limite en a si et seulement si $(\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$ <u>et</u> $\ell = f(a))$.

Nous obtenons en particulier un second critère utile de NON existence d'une limite en a : $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq f(a)$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$

limite finie d'une fonction en un réel a

Mise en œuvre théorique et pratique

f et g désignent deux fonctions définies sur D et a un réel adhérent à D.

1. Justifier que si f admet une limite finie ℓ en a, alors f est bornée au voisinage de a.
2. Justifier que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$. Alors :
   - $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$
   - Si $a \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$
   - $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \ell\ell'$
3. Si f est bornée et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.
4. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Dernières remarques

Nous avons donc défini les notions de :

1. Limite d'une fonction f en un réel a adhérent à l'ensemble de définition D de f. Ce réel a peut donc appartenir à D ou pas.
2. Limite à gauche et à droite d'une fonction f en un réel a adhérent à l'ensemble de définition D de f. Ce réel a peut donc appartenir à D ou pas.

Dernières remarques

Nous avons donc défini les notions de :

1. Limite d'une fonction f en un réel a adhérent à l'ensemble de définition D de f. Ce réel a peut donc appartenir à D ou pas.
2. Limite à gauche et à droite d'une fonction f en un réel a adhérent à l'ensemble de définition D de f. Ce réel a peut donc appartenir à D ou pas.

ATTENTION : Une fonction f peut admettre une limite à gauche et à droite égales en un même réel a sans que la fonction f n'admette de limite en a.
Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ vérifie : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, mais comme $f(0) \neq 0$, alors f n'a pas de limite en 0 (**Théorème 2**).
En revanche la restriction de cette fonction à $\mathbb{R}^*$ a une limite en 0, et c'est bien 0.