Limite d'une fonction

Approche intuitive et théorique ...
épisode 3 : limite infinie en un réel
Terminale spécialité maths

Yannick Le Bastard

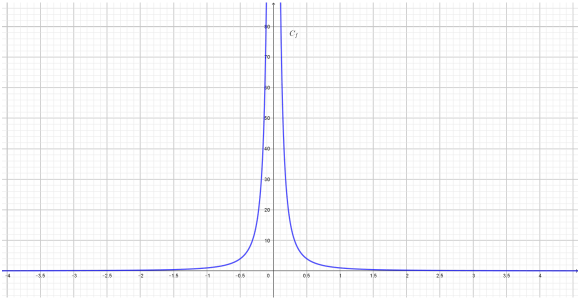
LEGTA de l'Hérault

January 16, 2024


Bienvenue sur les
sentiers
mathématiques !

Un exemple intéressant

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



f est une fonction paire : D_f est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$.

Un exemple intéressant

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur sur $]0; +\infty[$.
On résume ceci dans le tableau de variations qui suit :

Un exemple intéressant

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur sur $]0;+\infty[$.
On résume ceci dans le tableau de variations qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$?$ ‖ $?$	$\searrow$	0

Un exemple intéressant

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur sur $]0;+\infty[$.
On résume ceci dans le tableau de variations qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$?$ ‖ $?$	$\searrow$	0

Notre but est maintenant de justifier les "points d'interrogation" ; les 0 le seront plus tard. Par parité de f, leurs valeurs seront égales. Il nous suffira donc d'observer le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0 : on dira que x tend vers 0^+.

Un exemple intéressant

La fonction f n'est donc pas définie en 0. Cependant, nous allons étudier le comportement des images $f(x)$ (en ordonnée) lorsque x se rapproche aussi près que l'on veut de 0 (sans jamais l'atteindre).

Un exemple intéressant

La fonction f n'est donc pas définie en 0. Cependant, nous allons étudier le comportement des images $f(x)$ (en ordonnée) lorsque x se rapproche aussi près que l'on veut de 0 (sans jamais l'atteindre).

Mais que signifie : " x se raproche de 0" ? Ou dit autrement x est infiniment proche de 0 ?

x peut tendre vers 0 en restant strictement positif : 0,1 ; 0,01 ; 0,001, etc.
Mais x peut aussi tendre vers 0 en restant strictement négatif : -0,1 ; -0,01 ; -0,001, etc.

Un exemple intéressant

La fonction f n'est donc pas définie en 0. Cependant, nous allons étudier le comportement des images $f(x)$ (en ordonnée) lorsque x se rapproche aussi près que l'on veut de 0 (sans jamais l'atteindre).

Mais que signifie : " x se raproche de 0" ? Ou dit autrement x est infiniment proche de 0 ?

x peut tendre vers 0 en restant strictement positif : 0,1 ; 0,01 ; 0,001, etc. Mais x peut aussi tendre vers 0 en restant strictement négatif : -0,1 ; -0,01 ; -0,001, etc.

Le fait que f soit paire ne changera rien à l'affaire : que la variable x tende vers 0 en étant strictement négative ou strictement positive, donnera la même image $f(x)$.

Un exemple intéressant

La fonction f n'est donc pas définie en 0. Cependant, nous allons étudier le comportement des images $f(x)$ (en ordonnée) lorsque x se rapproche aussi près que l'on veut de 0 (sans jamais l'atteindre).

Mais que signifie : " x se raproche de 0" ? Ou dit autrement x est infiniment proche de 0 ?

x peut tendre vers 0 en restant strictement positif : 0,1 ; 0,01 ; 0,001, etc. Mais x peut aussi tendre vers 0 en restant strictement négatif : -0,1 ; -0,01 ; -0,001, etc.

Le fait que f soit paire ne changera rien à l'affaire : que la variable x tende vers 0 en étant strictement négative ou strictement positive, donnera la même image $f(x)$.

Nous allons donc évaluer numériquement les valeurs des images $f(x)$ lorsque x se rapproche indéfiniment de 0 (par valeurs supérieures ou inférieures).

Un exemple intéressant

Explicitons ceci à l'aide d'un tableau de valeurs :

x	$0,1$	$0,01$	$0,001$	10^{-6}	10^{-9}	10^{-10}
$f(x)$	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{20}

Un exemple intéressant

Explicitons ceci à l'aide d'un tableau de valeurs :

x	$0,1$	$0,01$	$0,001$	10^{-6}	10^{-9}	10^{-10}
$f(x)$	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{20}

Il semble que plus x se rapproche de 0, plus les termes $f(x)$ deviennent grands ; on pourrait même dire peuvent dépasser à un moment donné toute valeur B fixée à l'avance, aussi grande soit-elle ...

Un exemple intéressant

Explicitons ceci à l'aide d'un tableau de valeurs :

x	$0,1$	$0,01$	$0,001$	10^{-6}	10^{-9}	10^{-10}
$f(x)$	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{20}

Il semble que plus x se rapproche de 0, plus les termes $f(x)$ deviennent grands ; on pourrait même dire peuvent dépasser à un moment donné toute valeur B fixée à l'avance, aussi grande soit-elle ...

Fixons-nous par exemple $B = 16000$ (en ordonnée). La droite D d'équation $y = 16000$ coupe la courbe représentative de f en deux points.

Un exemple intéressant

Explicitons ceci à l'aide d'un tableau de valeurs :

x	$0,1$	$0,01$	$0,001$	10^{-6}	10^{-9}	10^{-10}
$f(x)$	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{20}

Il semble que plus x se rapproche de 0, plus les termes $f(x)$ deviennent grands ; on pourrait même dire peuvent dépasser à un moment donné toute valeur B fixée à l'avance, aussi grande soit-elle ...

Fixons-nous par exemple $B = 16000$ (en ordonnée). La droite D d'équation $y = 16000$ coupe la courbe représentative de f en deux points. Leurs abscisses sont les antécédents de 16000 par f i.e les solutions de l'équation $\dfrac{1}{x^2} = 16000$. Ce sont :

Un exemple intéressant

Explicitons ceci à l'aide d'un tableau de valeurs :

x	$0,1$	$0,01$	$0,001$	10^{-6}	10^{-9}	10^{-10}
$f(x)$	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{20}

Il semble que plus x se rapproche de 0, plus les termes $f(x)$ deviennent grands ; on pourrait même dire peuvent dépasser à un moment donné toute valeur B fixée à l'avance, aussi grande soit-elle ...

Fixons-nous par exemple $B = 16000$ (en ordonnée). La droite D d'équation $y = 16000$ coupe la courbe représentative de f en deux points. Leurs abscisses sont les antécédents de 16000 par f i.e les solutions de l'équation $\frac{1}{x^2} = 16000$. Ce sont : $-\frac{1}{400}$ et $\frac{1}{400}$.

Comme f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, si $x < \frac{1}{400}$, alors $f(x) > 16000$. Et comme f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$, si $x > -\frac{1}{400}$, alors $f(x) > 16000$

Un exemple intéressant

Bref, si $x \in D_f \cap]-400;400[=]-400;0[\cup]0;400[$, on a : $f(x) > 400^2 = 16000$.

Un exemple intéressant

Bref, si $x \in D_f \cap]-400;400[=]-400;0[\cup]0;400[$, on a : $f(x) > 400^2 = 16000$.

Plus précisément, si B désigne un réel strictement positif, dès que x est assez proche de 0 : $x \in \left]-\dfrac{1}{\sqrt{B}};\dfrac{1}{\sqrt{B}}\right[\setminus \{0\}$, alors $f(x) > B$.

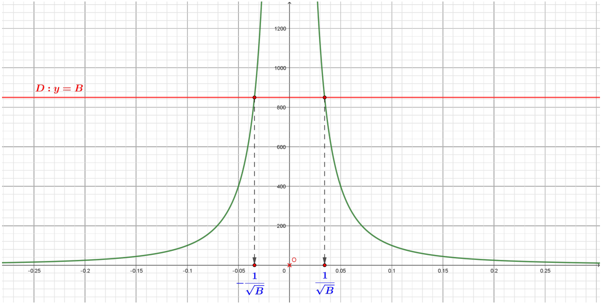
Bref, $f(x)$ peut dépasser n'importe quelle valeur strictement positive B pourvu que $x \in D$ soit assez proche de 0.

Un exemple intéressant

Bref, si $x \in D_f \cap]-400; 400[=]-400; 0[\cup]0; 400[$, on a :
$f(x) > 400^2 = 16000$.

Plus précisément, si B désigne un réel strictement positif, dès que x est assez proche de 0 : $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{B}}; \frac{1}{\sqrt{B}}\right[\setminus \{0\}$, alors $f(x) > B$.

Bref, $f(x)$ peut dépasser n'importe quelle valeur strictement positive B pourvu que $x \in D$ soit assez proche de 0.



Premières notations

Une définition presque formelle

f a pour **limite** $+\infty$ lorsque x tend vers 0, et on note $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$ (aussi grand soit-il) il existe un réel $x \in D_f$ suffisamment proche de 0 tel que $f(x) > B$.

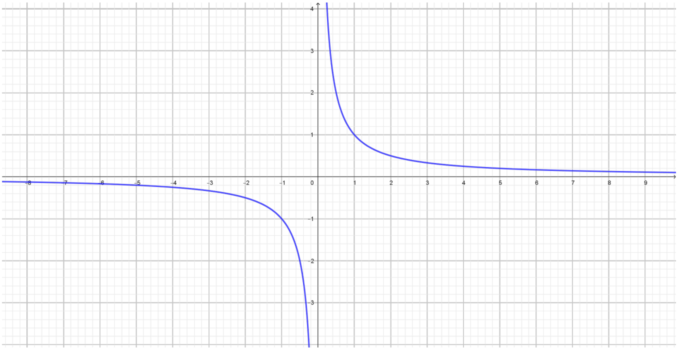
En particulier, on remarquera également que :

Deux autres définitions presque formelles

1. f a pour **limite à gauche** $+\infty$ lorsque x tend vers 0, et on note $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$ (aussi grand soit-il) il existe un réel $x \in D_f$ **strictement inférieur à** 0 tel que $f(x) > B$.
2. f a pour **limite à droite** $+\infty$ lorsque x tend vers 0, et on note $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$ (aussi grand soit-il) il existe un réel $x \in D_f$ **strictement supérieur à** 0 tel que $f(x) > B$.

Un second exemple intéressant

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



f est une fonction impaire : D_f est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Un second exemple intéressant

Comme à l'exemple précédent, nous allons nous intéresser au cas où la variable x se rapproche de 0 en laquelle f n'est pas définie (mais 0 est un *point adhérent* à D_f).

Un second exemple intéressant

Comme à l'exemple précédent, nous allons nous intéresser au cas où la variable x se rapproche de 0 en laquelle f n'est pas définie (mais 0 est un *point adhérent* à D_f).

Nous pourrions aussi nous limiter à des valeurs strictement positives de x puisque par imparité $f(-x) = -f(x)$. Mais pour des raisons pédagogiques, nous distinguerons les cas où :

1. x tend vers 0 par valeurs strictement inférieures : $x \to 0,\ x < 0$.
2. x tend vers 0 par valeurs strictement supérieures : $x \to 0,\ x < 0$.

Donnons un tableau des valeurs de $f(x)$ quand x tend vers 0.

x	$-0,1$	$-0,01$	-10^{-4}	-10^{-6}	-10^{-8}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	$0,01$	$0,1$
$f(x)$	-10	-100	-10^4	-10^6	-10^8	10^8	10^6	10^4	100	10

Un second exemple intéressant

Comme à l'exemple précédent, nous allons nous intéresser au cas où la variable x se rapproche de 0 en laquelle f n'est pas définie (mais 0 est un *point adhérent* à D_f).

Nous pourrions aussi nous limiter à des valeurs strictement positives de x puisque par imparité $f(-x) = -f(x)$. Mais pour des raisons pédagogiques, nous distinguerons les cas où :

1. x tend vers 0 par valeurs strictement inférieures : $x \to 0, \; x < 0$.
2. x tend vers 0 par valeurs strictement supérieures : $x \to 0, \; x < 0$.

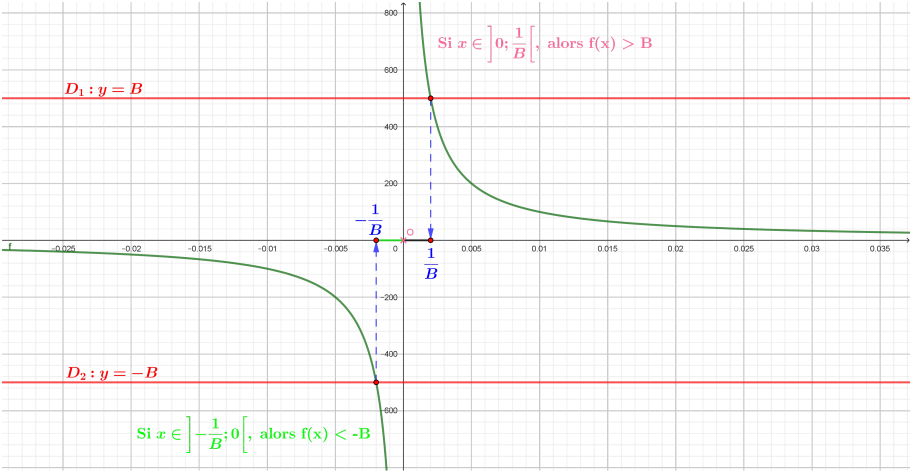
Donnons un tableau des valeurs de $f(x)$ quand x tend vers 0.

x	$-0,1$	$-0,01$	-10^{-4}	-10^{-6}	-10^{-8}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	$0,01$	$0,1$
$f(x)$	-10	-100	-10^4	-10^6	-10^8	10^8	10^6	10^4	100	10

Il semble que lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement inférieures (resp. vers 0 par valeurs strictement supérieures), $f(x)$ tende vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Un second exemple intéressant

Limites à gauche et à droite de f en 0 différentes : respectivement égales $-\infty$ et à $+\infty$.



Un second exemple intéressant

Définitions presque formelles

1. f **a pour limite à gauche** $-\infty$ lorsque x tend vers 0, et on note $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ si pour tout réel $B > 0$ (aussi grand soit-il) il existe un réel $x \in D_f$ strictement inférieur à 0 tel que $f(x) < -B$.
2. f **a pour limite à droite** $+\infty$ lorsque x tend vers 0, et on note $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$ (aussi grand soit-il) il existe un réel $x \in D_f$ strictement supérieur à 0 tel que $f(x) > B$.

Cependant...

f **n'a pas de limite** en 0.
En effet, que x se rapproche de 0 par la gauche (donc par valeurs **strictement inférieures**) ou par la droite (donc par valeurs **strictement supérieures**) n'engendre pas le même comportement pour son image $f(x)$.

Généralisation des exemples précédents

Dans toute la suite, f désigne une fonction définie sur un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ et a un réel n'appartenant pas à D_f, mais qui en est un *point frontière* : $\forall \alpha > 0, D_f \cap]-\alpha; \alpha[\neq \emptyset$.
Typiquement, a est une *valeur interdite* de f *au bord de* son ensemble de définition D_f.

Généralisation des exemples précédents

Dans toute la suite, f désigne une fonction définie sur un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ et a un réel n'appartenant pas à D_f, mais qui en est un *point frontière* : $\forall\alpha > 0, D_f \cap]-\alpha;\alpha[\neq \emptyset$.
Typiquement, a est une *valeur interdite* de f *au bord de* son ensemble de définition D_f.

Une définition formelle de la limite

On dit que f a pour **limite** $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout réel $B > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]-\alpha;\alpha[$, $f(x) > B$ (resp. $f(x) < -B$) :
$(\forall B > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in D_f \cap]-\alpha;\alpha[), f(x) > B$ (resp. $f(x) < -B$).

Généralisation des exemples précédents

Dans toute la suite, f désigne une fonction définie sur un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ et a un réel n'appartenant pas à D_f, mais qui en est un *point frontière* : $\forall \alpha > 0, D_f \cap]-\alpha;\alpha[\neq \emptyset$.
Typiquement, a est une *valeur interdite* de f *au bord de* son ensemble de définition D_f.

Une définition formelle de la limite

On dit que f a pour **limite** $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout réel $B > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]-\alpha;\alpha[$, $f(x) > B$ (resp. $f(x) < -B$) :
$(\forall B > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f \cap]-\alpha;\alpha[), f(x) > B$ (resp. $f(x) < -B$).

Remarquons que si f était définie en a, on aurait nécessairement une limite finie (en cas d'existence de limite) égale à $f(a)$. Nous le démontrerons dans un autre diaporama.

Généralisation des exemples précédents

Définitions formelles des limites à droite/à gauche

1. On dit que f **a pour limite à gauche** $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$) si pour tout réel $B > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]a - \alpha; a[$, $f(x) > B$ (resp. $f(x) < -B$).
2. On dit que f **a pour limite à droite** $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$) si pour tout réel $B > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]a; a + \alpha[$, $f(x) > B$ (resp. $f(x) < -B$).

Généralisation des exemples précédents

Définitions formelles des limites à droite/à gauche

1. On dit que f **a pour limite à gauche** $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$) si pour tout réel $B > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D_f\cap]a-\alpha; a[$, $f(x) > B$ (resp. $f(x) < -B$).
2. On dit que f **a pour limite à droite** $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$) si pour tout réel $B > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D_f\cap]a; a+\alpha[$, $f(x) > B$ (resp. $f(x) < -B$).

Remarquons que dire que f a pour limite à gauche (resp. à droite) $\pm\infty$ en a signifie que la restriction de f à $D_f\cap]-\infty; a[$ (resp. à $D_f\cap]a; +\infty[$) a pour limite $\pm\infty$.

Asymptotes verticales

Définitions

Soit f une fonction définie sur D_f et a un réel *adhérent* à D_f en lequel f n'est pas définie : typiquement une **valeur interdite** qui est un *point frontière* de D_f.
$\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f.;
On dit que la droite D d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$ si :

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

   OU

2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

   OU

3. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

Asymptotes verticales

Définitions

Soit f une fonction définie sur D_f et a un réel *adhérent* à D_f en lequel f n'est pas définie : typiquement une **valeur interdite** qui est un *point frontière* de D_f.

$\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f.;

On dit que la droite D d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$ si :

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

   OU

2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

   OU

3. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

Bref, "plus x se rapproche de a", "plus $f(x)$ *explose* vers l'infini !"

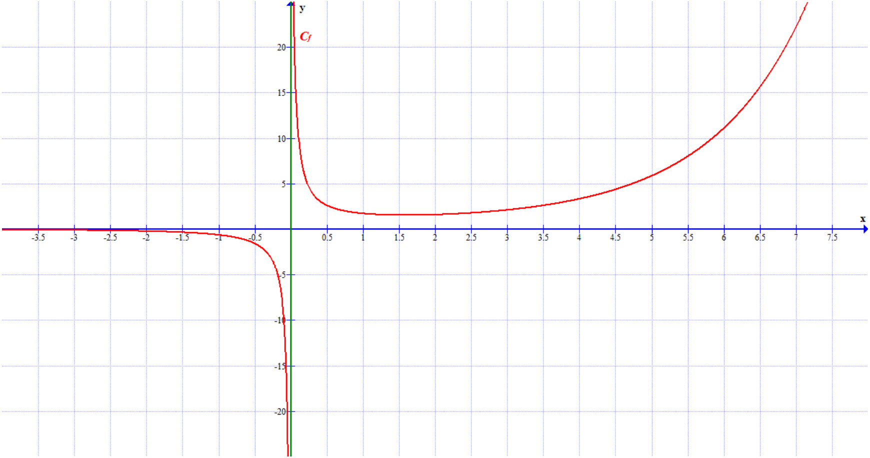
Exemples classiques à connaître

Exemples de fonctions avec asymptotes verticales

1. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ en a.
2. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^k}$ $(k \geq 2)$ en 0.
3. f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^k}{\ln(x)}$ $(k \geq 1)$ en 1.
4. f est définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x)$ en $-\dfrac{\pi}{2}$ et en $\dfrac{\pi}{2}$.

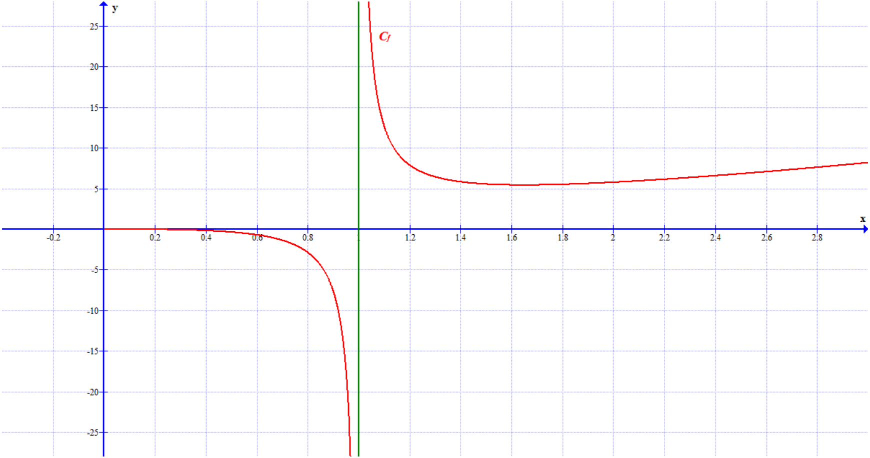
Exemples classiques à connaître

$$\lim_{x \to -4^-} \frac{1}{(x+4)^2} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -4^+} \frac{1}{(x+4)^2} = +\infty$$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = +\infty$$

Exemples classiques à connaître



$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{\ln(x)} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{\ln(x)} = +\infty$$

Exemples classiques à connaître

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$$

Exemples classiques à connaître

Démontrons par exemple le point 2.

Exemples classiques à connaître

Démontrons par exemple le point 2.

Soit donc k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif (le cas où x est strictement négatif se traiterait de même).

Rappelons que la fonction exponentielle exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa propre dérivée. De plus $\exp(0) = e^0 = 1$.

Exemples classiques à connaître

Démontrons par exemple le point 2.

Soit donc k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif (le cas où x est strictement négatif se traiterait de même).

Rappelons que la fonction exponentielle exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa propre dérivée. De plus $\exp(0) = e^0 = 1$.

En particulier exp est dévivable en 0 et donc par définition du nombre dérivé : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$.

Exemples classiques à connaître

Démontrons par exemple le point 2.

Soit donc k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif (le cas où x est strictement négatif se traiterait de même).

Rappelons que la fonction exponentielle exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa propre dérivée. De plus $\exp(0) = e^0 = 1$.

En particulier exp est dévivable en 0 et donc par définition du nombre dérivé : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$.

On a donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et partant, comme $k \geq 2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{k-1}} = +\infty$, d'où par produit :

Exemples classiques à connaître

Démontrons par exemple le point 2.

Soit donc k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif (le cas où x est strictement négatif se traiterait de même).

Rappelons que la fonction exponentielle exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa propre dérivée. De plus $\exp(0) = e^0 = 1$.

En particulier exp est dévivable en 0 et donc par définition du nombre dérivé : $\lim_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$.

On a donc $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et partant, comme $k \geq 2$, $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{k-1}} = +\infty$, d'où par produit :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^k} = +\infty}$$

En anticipant un peu sur les règles de calcul algébrique sur les limites (que vous avez déjà appliquées avec les suites numériques), déterminez les limites (ou limites à droite / à gauche) en a de chacune des fonctions qui suivent :

Quelques exercices

En anticipant un peu sur les règles de calcul algébrique sur les limites (que vous avez déjà appliquées avec les suites numériques), déterminez les limites (ou limites à droite / à gauche) en a de chacune des fonctions qui suivent :

Exercices classiques

1. $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x+5}$ en $a = -\dfrac{5}{2}$.
2. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+x-6}$ en $a = -3$ et $a = 2$.
3. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{(x-1)^3}$ en $a = 1$. Ne pas oublier que $\ln(1) = 0 \ldots$
4. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x^3}$ en $a = 0$.