Suites numériques

premières propriétés

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

September 18, 2022

Propriétés d'une suite numérique

Définitions

1. On dit que (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n : $u_n \leq M$.
2. On dit que (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n : $u_n \geq m$.
3. On dit que (u_n) est **bornée** si (u_n) est à la fois majorée et minorée.
4. On dit que (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_{n+1} \geq u_n$).

Propriétés d'une suite numérique

Définitions

1. On dit que (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n : $u_n \leq M$.
2. On dit que (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n : $u_n \geq m$.
3. On dit que (u_n) est **bornée** si (u_n) est à la fois majorée et minorée.
4. On dit que (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_{n+1} \geq u_n$).

Théorème

Soit (u_n) une suite définie **de manière explicite** pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$. Alors (u_n) hérite des propriétés de f : si f est croissante (resp. décroissante, resp. majorée, resp. minorée) sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est aussi croissante (resp. décroissante, resp. majorée, resp. minorée).

Propriétés d'une suite numérique

Remarque : (u_n) est bornée s'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout entier naturel n, on ait $|u_n| \leq M$.

Exemples

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ respectivement par $u_n = \frac{1}{n+1}$, $v_n = n$ et $w_n = (-1)^n$. Précisez dans chacun des cas si les suites sont monotones, majorées, minorées, bornées.

Propriétés d'une suite numérique

Remarque : (u_n) est bornée s'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout entier naturel n, on ait $|u_n| \leq M$.

Exemples

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ respectivement par $u_n = \frac{1}{n+1}$, $v_n = n$ et $w_n = (-1)^n$. Précisez dans chacun des cas si les suites sont monotones, majorées, minorées, bornées.

solution

1. (u_n) est strictement décroissante et bornée.
2. (v_n) est strictement croissante, minorée mais pas majorée.
3. (w_n) est n'est ni croissante, ni décroissante mais bornée.

Mini défi : donnez un exemple de suite non monotone et non bornée.

Propriétés d'une suite numérique

Le théorème précédent est faux pour les les suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

f croissante $\not\Rightarrow$ (u_n) croissante.
f décroissante $\not\Rightarrow$ (u_n) décroissante.

Le théorème précédent est faux pour les les suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

f croissante $\not\Rightarrow$ (u_n) croissante.
f décroissante $\not\Rightarrow$ (u_n) décroissante.

On définit (u_n) par $u_0 = 16$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ et (v_n) par $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ où f est définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, donc <u> f croissante</u> et g est définie par $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, donc <u> g décroissante</u>.

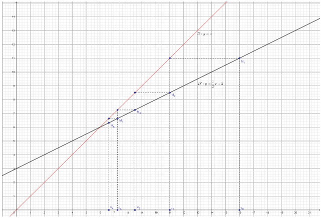

Figure: Or (u_n) décroissante

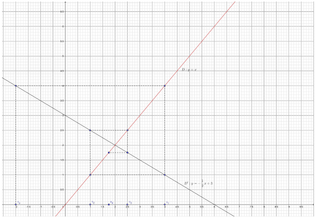

Figure: Et (v_n) n'est même pas monotone !

Comment donc étudier les variations d'une suite ?

A ce stade de l'année, nous disposons de peu de fonctions dont nous connaissons le sens de variation et qui pourraient nous aider à étudier les suites définies de manière explicite : les fonctions de référence vues en seconde.

Comment donc étudier les variations d'une suite ?

A ce stade de l'année, nous disposons de peu de fonctions dont nous connaissons le sens de variation et qui pourraient nous aider à étudier les suites définies de manière explicite : les fonctions de référence vues en seconde.

Vous en découvrirez de nouvelles au cours de cette année de première. Quant aux suites définies par récurrence, mis à part quelques cas particuliers, leur étude est plus délicate. Elle nécessite notamment de connaitre le **raisonnement par récurrence** étudié en terminale dans l'option maths spécialité.

Comment donc étudier les variations d'une suite ?

A ce stade de l'année, nous disposons de peu de fonctions dont nous connaissons le sens de variation et qui pourraient nous aider à étudier les suites définies de manière explicite : les fonctions de référence vues en seconde.

Vous en découvrirez de nouvelles au cours de cette année de première. Quant aux suites définies par récurrence, mis à part quelques cas particuliers, leur étude est plus délicate. Elle nécessite notamment de connaitre le **raisonnement par récurrence** étudié en terminale dans l'option maths spécialité.

Observez-les exemples qui suivent, ils sont bien plus parlants qu'un long discours.

Méthodes d'étude des variations d'une suite

Rappelons qu'une suite (u_n) est :

1. croissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.
2. décroissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leq u_n$.

Méthodes d'étude des variations d'une suite

Rappelons qu'une suite (u_n) est :

1. croissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.
2. décroissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leq u_n$.

Cette notion a un sens à partir d'un certain rang : les premiers termes u_n d'une suite peuvent varier de manière erratique, mais à partir d'un certain moment, disons pour n dépassant un certain entier naturel N, on aura $u_{n+1} \geq u_n$ ou $u_{n+1} \leq u_n$.

Méthodes d'étude des variations d'une suite

Rappelons qu'une suite (u_n) est :

1. croissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.
2. décroissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leq u_n$.

Cette notion a un sens à partir d'un certain rang : les premiers termes u_n d'une suite peuvent varier de manière erratique, mais à partir d'un certain moment, disons pour n dépassant un certain entier naturel N, on aura $u_{n+1} \geq u_n$ ou $u_{n+1} \leq u_n$.

Deux méthodes

On ne traite que le cas des suites croissantes. Vous adapterez au cas des suites décroissantes. Pour prouver qu'une suite (u_n) est croissante :

1. On prouve directement que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.

Méthodes d'étude des variations d'une suite

Rappelons qu'une suite (u_n) est :

1. croissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.
2. décroissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leq u_n$.

Cette notion a un sens à partir d'un certain rang : les premiers termes u_n d'une suite peuvent varier de manière erratique, mais à partir d'un certain moment, disons pour n dépassant un certain entier naturel N, on aura $u_{n+1} \geq u_n$ ou $u_{n+1} \leq u_n$.

Deux méthodes

On ne traite que le cas des suites croissantes. Vous adapterez au cas des suites décroissantes. Pour prouver qu'une suite (u_n) est croissante :

1. On prouve directement que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.
2. Si l'on sait que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, on prouve que pour tout entier naturel n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Méthode 1 : **Donnons-nous un entier naturel** n **quelconque**. Cette petite phrase n'a l'air de rien mais elle est vitale ! Alors :
$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n > 0$.
On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Méthode 1 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque**. Cette petite phrase n'a l'air de rien mais elle est vitale ! Alors :
$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n > 0.$
On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Méthode 2 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque**. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \times 2^n}{2^n} = 2 > 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Méthodes d'étude des variations d'une suite

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Méthode 1 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque**. Cette petite phrase n'a l'air de rien mais elle est vitale ! Alors :
$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n > 0$.
On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Méthode 2 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque**. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \times 2^n}{2^n} = 2 > 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Pour cette suite et plus généralement pour toutes les suites de la forme a^n $(a > 0)$, les deux méthodes fonctionnent.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{3}n + 2$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Méthodes d'étude des variations d'une suite

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{3}n + 2$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Méthode 1 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque**. Alors :
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+1) + 2 - \left(\frac{1}{3}n + 2\right)$. Ne pas oublier les parenthèses !
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3}n - 2 = \frac{1}{3} > 0$.
On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{3}n + 2$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Méthode 1 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque**. Alors :
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+1) + 2 - \left(\frac{1}{3}n + 2\right)$. Ne pas oublier les parenthèses !
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3}n - 2 = \frac{1}{3} > 0$.
On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Méthode 2 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque**. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{3}(n+1)+2}{\frac{1}{3}n+2} = \frac{\frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + 2}{\frac{1}{3}n+2} = \frac{(\frac{1}{3}n+2) + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}n+2} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}n+2} > 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{3}n + 2$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Méthode 1 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque**. Alors :
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+1) + 2 - \left(\frac{1}{3}n + 2\right)$. Ne pas oublier les parenthèses !
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3}n - 2 = \frac{1}{3} > 0$.
On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Méthode 2 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque**. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{3}(n+1) + 2}{\frac{1}{3}n + 2} = \frac{\frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + 2}{\frac{1}{3}n + 2} = \frac{\left(\frac{1}{3}n + 2\right) + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}n + 2} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}n + 2} > 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.
La méthode 1 est nettement plus simple !

Attention, tout n'est pas si simple... en première !

Un exemple croustillant

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 2^n - 2n$. Alors (v_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang.

La seconde méthode est inadaptée : pourquoi ?

Attention, tout n'est pas si simple... en première !

Un exemple croustillant

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 2^n - 2n$. Alors (v_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang.

La seconde méthode est inadaptée : pourquoi ?
Essayons la première méthode : donnons-nous un entier naturel n quelconque et évaluons le signe de $v_{n+1} - v_n$.
$v_{n+1} - v_n = (2^{n+1} - 2(n+1)) - (2^n - n) = 2 \times 2^n - 2n - 2 - 2^n + n$
$v_{n+1} - v_n = 2^n - n - 2$. Testons différentes valeurs de n :

Attention, tout n'est pas si simple... en première !

Un exemple croustillant

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 2^n - 2n$. Alors (v_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang.

La seconde méthode est inadaptée : pourquoi ?
Essayons la première méthode : donnons-nous un entier naturel n quelconque et évaluons le signe de $v_{n+1} - v_n$.
$v_{n+1} - v_n = (2^{n+1} - 2(n+1)) - (2^n - n) = 2 \times 2^n - 2n - 2 - 2^n + n$
$v_{n+1} - v_n = 2^n - n - 2$. Testons différentes valeurs de n :

Pour $n = 0$: $v_{n+1} - v_n = v_1 - v_0 = -3 < 0$.
Pour $n = 1$: $v_{n+1} - v_n = v_2 - v_1 = -1 < 0$.
Pour $n = 2$: $v_{n+1} - v_n = v_3 - v_2 = 0$.
Pour $n = 3$: $v_{n+1} - v_n = v_4 - v_3 = 3 > 0$.
Pour $n = 4$: $v_{n+1} - v_n = v_5 - v_4 = 10 > 0$.

Il semble que la suite (v_n) soit strictement croissante à partir du rang $N = 3$.

Attention, tout n'est pas si simple... en première !

Il semble que la suite (v_n) soit strictement croissante à partir du rang $N = 3$.

Seulement, **il est totalement abusif de généraliser**. Ce n'est pas l'observation de quelques termes qui prouve que pour tous les entiers $n \geq 3$: $v_{n+1} - v_n > 0$.

Attention, tout n'est pas si simple... en première !

Il semble que la suite (v_n) soit strictement croissante à partir du rang $N = 3$.

Seulement, **il est totalement abusif de généraliser**. Ce n'est pas l'observation de quelques termes qui prouve que pour tous les entiers $n \geq 3$: $v_{n+1} - v_n > 0$.

Mais nous avons gagné une information : celle du rang à partir duquel (u_n) serait strictement croissante. Programmez sur votre calculatrice la suite de terme général $2^n - n - 2$ et observez la table des valeurs.

Attention, tout n'est pas si simple... en première !

Il semble que la suite (v_n) soit strictement croissante à partir du rang $N = 3$.

Seulement, **il est totalement abusif de généraliser**. Ce n'est pas l'observation de quelques termes qui prouve que pour tous les entiers $n \geq 3$: $v_{n+1} - v_n > 0$.

Mais nous avons gagné une information : celle du rang à partir duquel (u_n) serait strictement croissante. Programmez sur votre calculatrice la suite de terme général $2^n - n - 2$ et observez la table des valeurs.

Nous venons d'effectuer ce qu'on appelle "une conjecture". Pour la prouver, comme la suite $w_n = 2^n - n - 2$ est définie de manière explicite, il suffirait par exemple d'étudier la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2^x - x - 2$ et justifier qu'elle prend des valeurs strictement positives si $x \geq 3$. Mais qu'est que ce 2^x pour x réel ???

Attention, tout n'est pas si simple... en première !

Il semble que la suite (v_n) soit strictement croissante à partir du rang $N = 3$.

Seulement, **il est totalement abusif de généraliser**. Ce n'est pas l'observation de quelques termes qui prouve que pour tous les entiers $n \geq 3$: $v_{n+1} - v_n > 0$.

Mais nous avons gagné une information : celle du rang à partir duquel (u_n) serait strictement croissante. Programmez sur votre calculatrice la suite de terme général $2^n - n - 2$ et observez la table des valeurs.

Nous venons d'effectuer ce qu'on appelle "une conjecture". Pour la prouver, comme la suite $w_n = 2^n - n - 2$ est définie de manière explicite, il suffirait par exemple d'étudier la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2^x - x - 2$ et justifier qu'elle prend des valeurs strictement positives si $x \geq 3$. Mais qu'est que ce 2^x pour x réel ???

On peut aussi utiliser un **raisonnement par récurrence** : il vous faudra attendre la terminale spécialité maths ou travailler la fiche "compléments".

Synthèse

Résumé

Pour étudier une une suite définie de manière explicite $u_n = f(n)$:

1. On peut étudier la fonction f associée (si elle est assez simple) pour en déduire des renseignements sur la suite (u_n) : majorée, minorée, croissante ...
2. Si ce n'est pas possible, on peut essayer de retrouver toutes ces propriétés "à la main". Par exemple quid de $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$?

Pour étudier une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$:

1. On peut, si la suite est très simple, l'exprimer de manière explicite et on est ramené au cas précédent.
2. Juste émettre des conjectures à l'aide d'un graphique ou d'un tableau de valeurs et attendre la terminale pour une justification complète !