Suites numériques

premières notions

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

September 4, 2022

Exemple d'introduction

Compléter des séquences de nombres...

En admettant que la logique soit la même pour la création de chacun des termes d'une suite de nombres, déterminez les quatre termes qui suivent.

1. $1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad . \quad . \quad . \quad .$
2. $2 \quad -1 \quad -4 \quad -7 \quad . \quad . \quad . \quad .$
3. $1 \quad -2 \quad 4 \quad -8 \quad 16 \quad . \quad . \quad . \quad .$
4. $-1 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 11 \quad . \quad . \quad . \quad .$
5. $1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16} \quad . \quad . \quad . \quad .$
6. $1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad . \quad . \quad . \quad .$
7. $1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad . \quad . \quad . \quad .$
8. $0 \quad 1 \quad 8 \quad 27 \quad . \quad . \quad . \quad .$

Comment définir une suite de réels ?

Au niveau du secondaire (première et terminale), on définit une suite de nombres de deux manières :

1. **de manière explicite** à l'aide d'une formule permettant de calculer n'importe quel terme directement,

Comment définir une suite de réels ?

Au niveau du secondaire (première et terminale), on définit une suite de nombres de deux manières :

1. **de manière explicite** à l'aide d'une formule permettant de calculer n'importe quel terme directement,
2. **de proche en proche** : connaissant un terme initial, on a une formule qui permet de calculer le successeur de n'importe quel terme.

Mais tout d'abord, qu'est qu'une suite de réels ?

Comment définir une suite de réels ?

Au niveau du secondaire (première et terminale), on définit une suite de nombres de deux manières :

1. **de manière explicite** à l'aide d'une formule permettant de calculer n'importe quel terme directement,
2. **de proche en proche** : connaissant un terme initial, on a une formule qui permet de calculer le successeur de n'importe quel terme.

Mais tout d'abord, qu'est qu'une suite de réels ?

Définition

Une **suite de réels** est une fonction $\mathbf{u}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Autrement dit, on associe à tout entier naturel n un unique réel $u(n)$, que nous noterons u_n (notation indicielle).
La suite elle-même se note $\mathbf{u}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore (u_n).

Remarque : souvent la suite est définie à partir d'un certain entier naturel n_0, par exemple la suite $\mathbf{u}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ n'a de sens que pour $n \geq 1$.

Comment définir une suite de réels ?

Lien entre les deux approches (heuristique) : Reprenons le premier exemple de la première diapositive :

1 3 5 7 9 . . . .

En notant u_0 le premier terme de cette suite :

1. Comment note-t-on le second terme de cette suite ? Le quatrième ? Le neuvième ? Le $n-$ème ? Le $(n+1)-$ème ? Le $(n+2)-$ème ?

Comment définir une suite de réels ?

Lien entre les deux approches (heuristique) : Reprenons le premier exemple de la première diapositive :

1 3 5 7 9 . . . .

En notant u_0 le premier terme de cette suite :

1. Comment note-t-on le second terme de cette suite ? Le quatrième ? Le neuvième ? Le $n-$ème ? Le $(n+1)-$ème ? Le $(n+2)-$ème ?
2. Exprimez u_1 en fonction de u_0, u_2 en fonction de u_1, u_3 en fonction de u_2. Quelle relation semble lier u_{n+1} en fonction de u_n ? Nous venons de définir cette suite **par récurrence** : la donnée du terme initial u_0 et d'une relation reliant N'IMPORTE QUEL terme u_n à son successeur u_{n+1}.

Comment définir une suite de réels ?

Lien entre les deux approches (heuristique) : Reprenons le premier exemple de la première diapositive :

1 3 5 7 9 . . . .

En notant u_0 le premier terme de cette suite :

1. Comment note-t-on le second terme de cette suite ? Le quatrième ? Le neuvième ? Le $n-$ème ? Le $(n+1)-$ème ? Le $(n+2)-$ème ?
2. Exprimez u_1 en fonction de u_0, u_2 en fonction de u_1, u_3 en fonction de u_2. Quelle relation semble lier u_{n+1} en fonction de u_n ? Nous venons de définir cette suite **par récurrence** : la donnée du terme initial u_0 et d'une relation reliant N'IMPORTE QUEL terme u_n à son successeur u_{n+1}.
3. On peut représenter les termes successifs de cette suite (u_n) sur une droite horizontale. En vous aidant d'une telle représentation, tentez de deviner l'expression de u_n en fonction de n. On dit qu'on a défini notre suite **de manière explicite**.

Principes de calcul des termes d'une suite

Calculs sur les suites définies de manière explicite

Calculez les quatre premiers termes des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = 2n - 5$
2. $u_n = -2n^2 + 3n + 7$
3. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ (sous forme de fraction dès que $n \geq 2$)

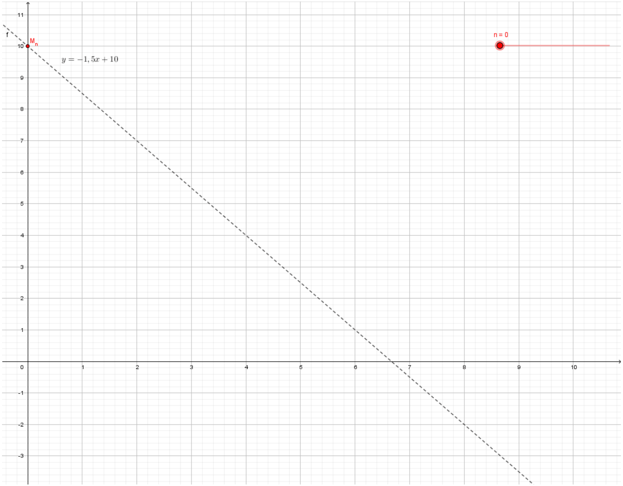
Calculs sur les suites définies par récurrence

Calculez les quatre premiers termes des suites (u_n) définies par :

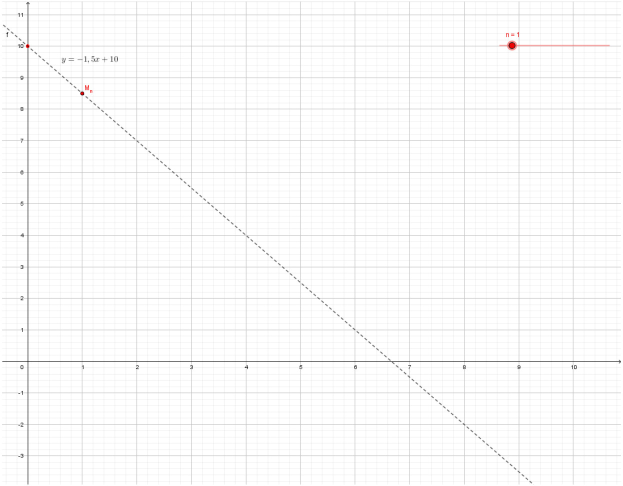
1. $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -2u_n^2 + 3n + 7$
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ (sous forme de fraction dès que $n \geq 2$)

Représentation des termes d'une suite

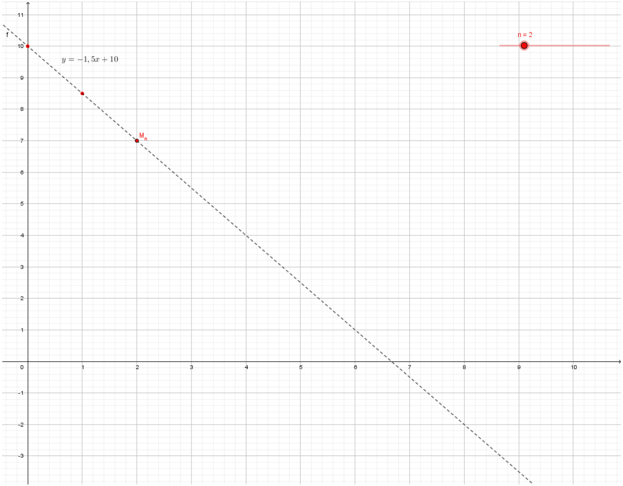
Tracer sur le repère les dix premiers points $M_n(n; u_n)$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.



Tracer sur le repère les dix premiers points $M_n(n; u_n)$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.

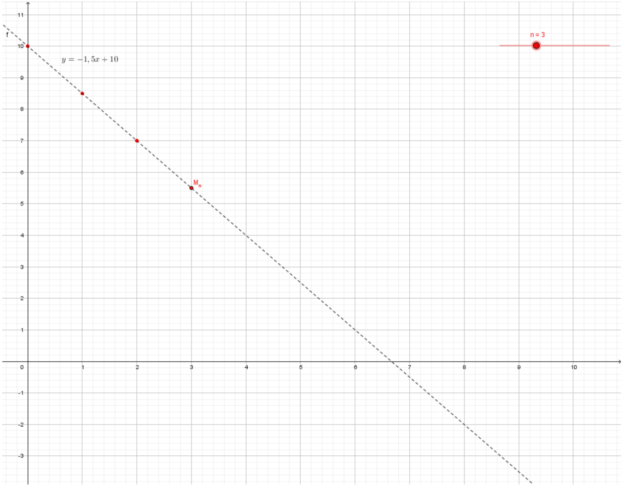


Tracer sur le repère les dix premiers points $M_n(n; u_n)$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.



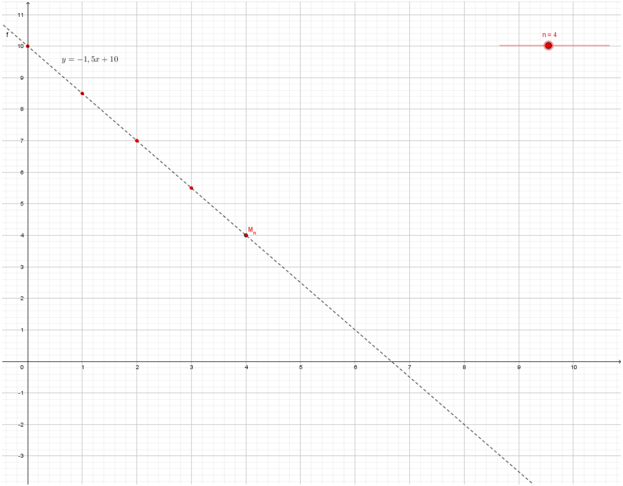
Représentation des termes d'une suite

Tracer sur le repère les dix premiers points $M_n(n; u_n)$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.

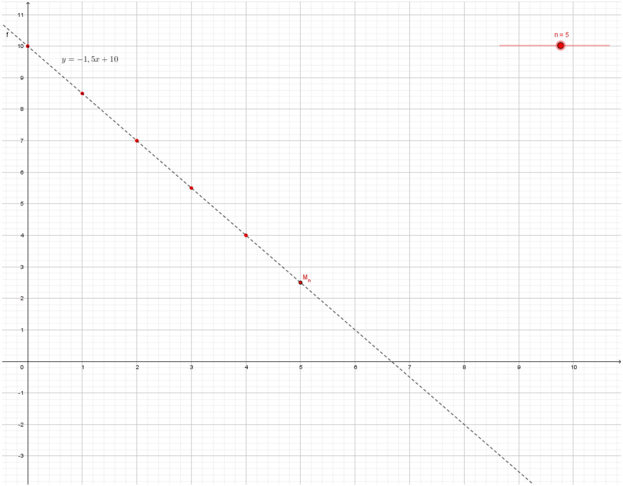


Représentation des termes d'une suite

Tracer sur le repère les dix premiers points $M_n(n; u_n)$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.

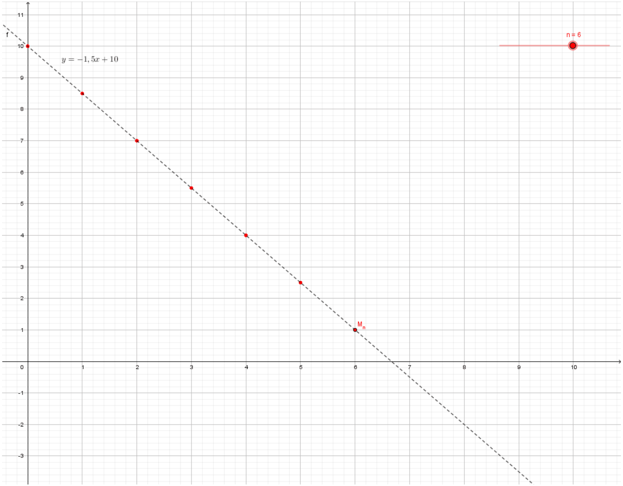


Tracer sur le repère les dix premiers points $M_n(n; u_n)$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.

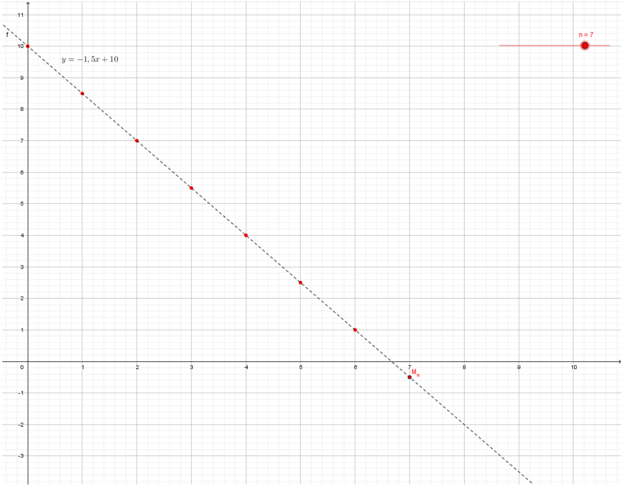


Représentation des termes d'une suite

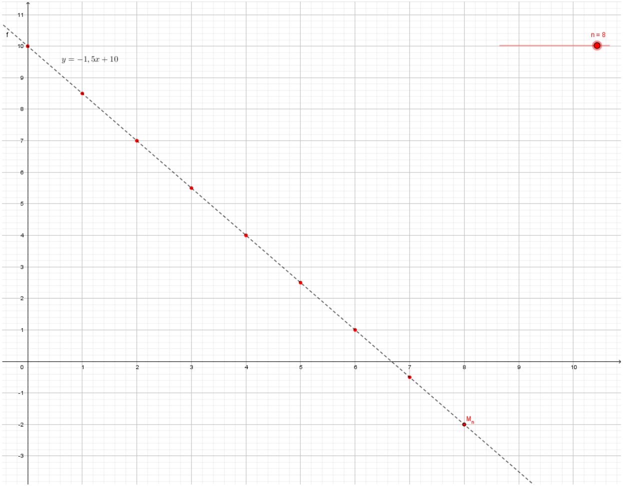
Tracer sur le repère les dix premiers points $M_n(n; u_n)$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.



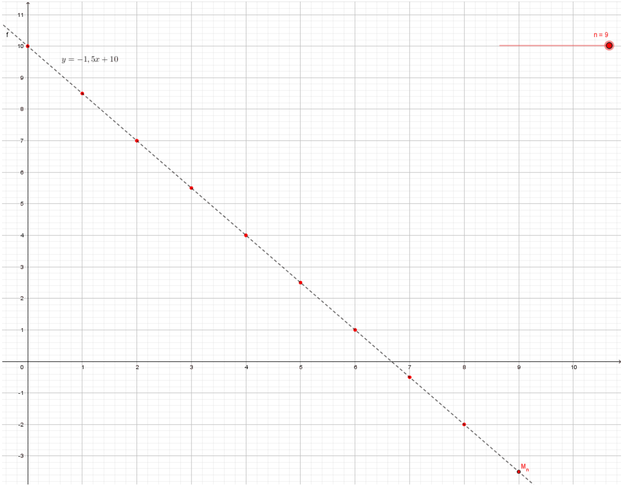
Tracer sur le repère les dix premiers points $M_n(n; u_n)$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.



Tracer sur le repère les dix premiers points $M_n(n; u_n)$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.



Tracer sur le repère les dix premiers points $M_n(n; u_n)$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.



Représentation des termes d'une suite

Comme seule l'ordonnée des points du graphique précédent nous intéresse, nous pouvons nous contenter d'un seul axe, que nous choisirons horizontal. La représentation ici est donc en une dimension.

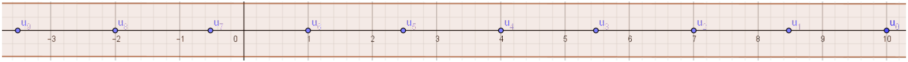
Comme seule l'ordonnée des points du graphique précédent nous intéresse, nous pouvons nous contenter d'un seul axe, que nous choisirons horizontal. La représentation ici est donc en une dimension.

Représentons sur l'axe gradué ci-dessous les dix premiers termes u_n de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.

Représentation des termes d'une suite

Comme seule l'ordonnée des points du graphique précédent nous intéresse, nous pouvons nous contenter d'un seul axe, que nous choisirons horizontal. La représentation ici est donc en une dimension.

Représentons sur l'axe gradué ci-dessous les dix premiers termes u_n de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1,5n + 10$.



Nous retrouverons cette idée pour la représentation des termes des suites définies par récurrence.

Remarquons que les termes de la suite (u_n) semblent décroitre quand n grandit.

Représentation des termes d'une suite

Nous allons à présent examiner le cas très différent des suites définies par récurrence, c'est-à-dire des suites définies par la donnée d'un terme (très souvent le terme initial u_0 ou u_1) et d'une relation valable pour tout entier naturel n par une fonction f exprimant u_{n+1} en fonction de n et de u_n.

Représentation des termes d'une suite

Nous allons à présent examiner le cas très différent des suites définies par récurrence, c'est-à-dire des suites définies par la donnée d'un terme (très souvent le terme initial u_0 ou u_1) et d'une relation valable pour tout entier naturel n par une fonction f exprimant u_{n+1} en fonction de n et de u_n.

Nous nous limiterons très souvent au cas des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ conformément au programme.

Mise en garde

Il faut néanmoins vérifier que ces suites sont bien définies : peut-on calculer TOUS les termes d'une telle suite ?
Examinons par exemple le cas de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est définie sur $]-\infty; 2]$ par $f(x) = 2 + \sqrt{2-x}$.
$u_1 = 2 + \sqrt{2-1} = 3$, mais u_2 ??? Aucun sens !

Représentation des termes d'une suite

Nous allons à présent examiner le cas très différent des suites définies par récurrence, c'est-à-dire des suites définies par la donnée d'un terme (très souvent le terme initial u_0 ou u_1) et d'une relation valable pour tout entier naturel n par une fonction f exprimant u_{n+1} en fonction de n et de u_n.

Nous nous limiterons très souvent au cas des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ conformément au programme.

Mise en garde

Il faut néanmoins vérifier que ces suites sont bien définies : peut-on calculer TOUS les termes d'une telle suite ?
Examinons par exemple le cas de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est définie sur $]-\infty; 2]$ par $f(x) = 2 + \sqrt{2-x}$.
$u_1 = 2 + \sqrt{2-1} = 3$, mais u_2 ??? Aucun sens !

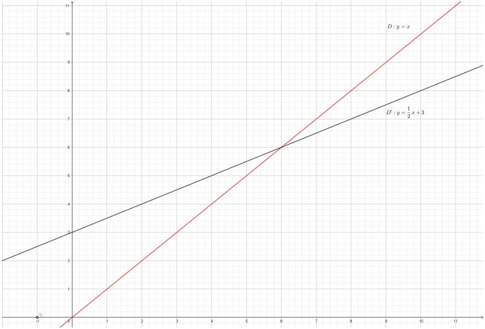
Rassurez-vous, vous ne rencontrerez pas ce cas cette année. Mais la rigueur scientifique impose une telle vérification.

Représentation des termes d'une suite

Donnons-nous une suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Donnons-nous une suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Nous commençons par prendre comme terme initial $u_0 = -1$ et traçons dans un repère orthonormal la droite D d'équation $y = x$ et la fonction f (dont la courbe représentative est une droite également) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 3$.



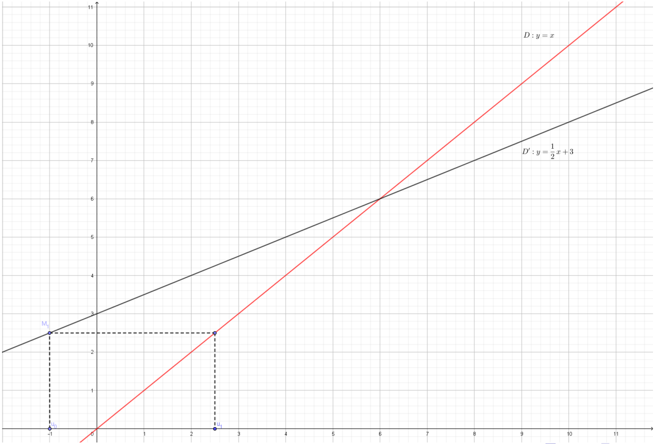
Représentation des termes d'une suite

Partant du point $M_0(u_0; 0)$, on calcule $u_1 = f(u_0)$ et on place sur la courbe de f, à savoir D' le point $M_1(u_0; u_1)$.

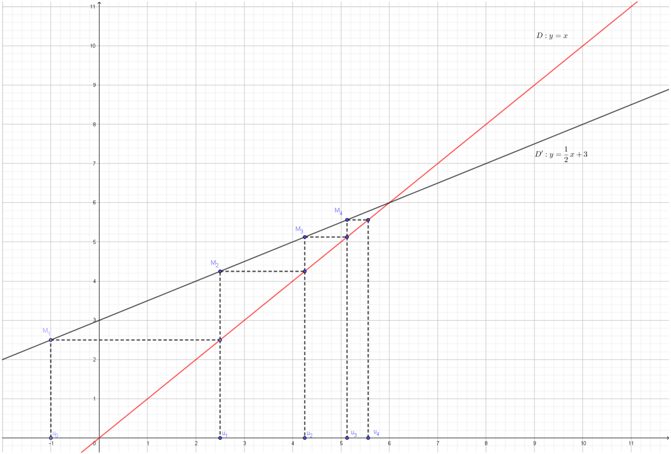
Représentation des termes d'une suite

Partant du point $M_0(u_0; 0)$, on calcule $u_1 = f(u_0)$ et on place sur la courbe de f, à savoir D' le point $M_1(u_0; u_1)$. On projette horizontalement M_1 sur D, ce qui nous donne un point de coordonnées $(u_1; u_1)$;

Partant du point $M_0(u_0; 0)$, on calcule $u_1 = f(u_0)$ et on place sur la courbe de f, à savoir D' le point $M_1(u_0; u_1)$. On projette horizontalement M_1 sur D, ce qui nous donne un point de coordonnées $(u_1; u_1)$; enfin on récupère u_1 sur l'axe des abscisses par projection verticale.



On recommence la même opération en partant du point $(u_1; 0)$.

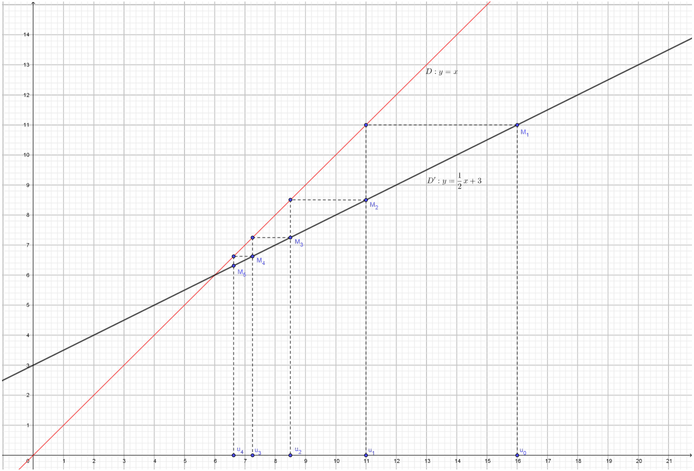


Les termes de la suite (u_n) semblent croitre quand n grandit.

Mais que se passe-t-il si l'on prend comme terme initial $u_0 = 16$?

Représentation des termes d'une suite

Mais que se passe-t-il si l'on prend comme terme initial $u_0 = 16$?



Cette fois, les termes de la suite (u_n) semblent décroitre lorsque n grandit.

Synthèse

Retenons bien les choses suivantes :

1. Une suite numérique peut être définie de deux manières :
    1. De façon explicite : $u_n = f(n)$
    2. Par récurrence : donnée de u_0 et d'une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n.

Synthèse

Retenons bien les choses suivantes :

1. Une suite numérique peut être définie de deux manières :
   1. De façon explicite : $u_n = f(n)$
   2. Par récurrence : donnée de u_0 et d'une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n.
2. Les termes d'une suite définie de manière de manière explicite ne sont rien d'autres que les images des entiers n par une certaine fonction f : leur calcul est immédiat.

Synthèse

Retenons bien les choses suivantes :

1. Une suite numérique peut être définie de deux manières :
   1. De façon explicite : $u_n = f(n)$
   2. Par récurrence : donnée de u_0 et d'une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n.
2. Les termes d'une suite définie de manière de manière explicite ne sont rien d'autres que les images des entiers n par une certaine fonction f : leur calcul est immédiat.
3. Les termes d'une suite définie par récurrence se calculent de proche en proche.

Synthèse

Retenons bien les choses suivantes :

1. Une suite numérique peut être définie de deux manières :
   1. De façon explicite : $u_n = f(n)$
   2. Par récurrence : donnée de u_0 et d'une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n.
2. Les termes d'une suite définie de manière de manière explicite ne sont rien d'autres que les images des entiers n par une certaine fonction f : leur calcul est immédiat.
3. Les termes d'une suite définie par récurrence se calculent de proche en proche.
4. Nous pouvons parfois exprimer simplement une suite définie par récurrence en une suite définie de manière explicite. Nous verrons ceci dans un prochain diaporama.

Synthèse

Retenons bien les choses suivantes :

1. Une suite numérique peut être définie de deux manières :
    1. De façon explicite : $u_n = f(n)$
    2. Par récurrence : donnée de u_0 et d'une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n.
2. Les termes d'une suite définie de manière de manière explicite ne sont rien d'autres que les images des entiers n par une certaine fonction f : leur calcul est immédiat.
3. Les termes d'une suite définie par récurrence se calculent de proche en proche.
4. Nous pouvons parfois exprimer simplement une suite définie par récurrence en une suite définie de manière explicite. Nous verrons ceci dans un prochain diaporama.
5. Enfin, vous devez savoir parfaitement calculer et représenter les premiers termes d'une suite, quel que soit son mode de définition.