Suites numériques

IV : Suites arithmétiques et géométriques

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

November 5, 2022

Introduction

Exemples

Certaines situations de la vie courante (en physique, en biologie ou en économie par exemple) nous amènent à modéliser l'évolution et/ou le calcul d'une quantité à l'aide de suites numériques.

1. évolution du nombre d'atomes de carbone 14 au cours du temps,
2. évolution d'une population animale introduite dans un biotope,
3. calcul d'une mensualité de remboursement suite à un emprunt.

Introduction

Exemples

Certaines situations de la vie courante (en physique, en biologie ou en économie par exemple) nous amènent à modéliser l'évolution et/ou le calcul d'une quantité à l'aide de suites numériques.

1. évolution du nombre d'atomes de carbone 14 au cours du temps,
2. évolution d'une population animale introduite dans un biotope,
3. calcul d'une mensualité de remboursement suite à un emprunt.

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à deux types particuliers de suites : utiles dans des problèmes concrets comme plus abstraits et surtout très simples d'approche : les **suites arithmétiques** et les **suites géométriques**.

Suites arithmétiques

Définition 1

Une suite (u_n) est **arithmétique** si la différence entre deux termes consécutifs est constante.

Mathématiquement parlant, les suites arithmétiques sont les suites (u_n) telles que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = \text{constante}$.

Définition 2

La constante précédente s'appelle la **raison** de la suite et se note **r**.

Définition 1

Une suite (u_n) est **arithmétique** si la différence entre deux termes consécutifs est constante.

Mathématiquement parlant, les suites arithmétiques sont les suites (u_n) telles que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n =$ constante.

Définition 2

La constante précédente s'appelle la **raison** de la suite et se note **r**.

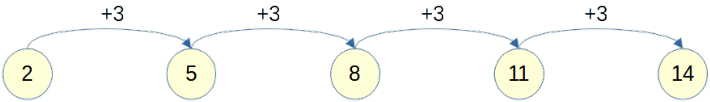


Figure: Suite arithmétique de raison 3

Exercice 1 : arithmétique ou pas ?

Déterminez, en le justifiant, les suites arithmétiques parmi les suites définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = 3n^2 + 2n - 1$
2. $v_n = -2n + 7$
3. $w_n = \dfrac{1}{n+1}$
4. $t_n = \dfrac{3}{4}n - 2$
5. $z_n = 5^{2n+1}$

Exercice 1 : arithmétique ou pas ?

Déterminez, en le justifiant, les suites arithmétiques parmi les suites définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = 3n^2 + 2n - 1$
2. $v_n = -2n + 7$
3. $w_n = \dfrac{1}{n+1}$
4. $t_n = \dfrac{3}{4}n - 2$
5. $z_n = 5^{2n+1}$

Solutions

(v_n) et (t_n) sont les deux seules suites arithmétiques, de raisons respectives $r = -2$ et $r = \dfrac{3}{4}$.

Suites arithmétiques

Remarque 1

Une suite arithmétique (u_n) est entièrement définie par la donnée de son premier terme u_0 et de sa raison r :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \text{Pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

C'est la définition **par récurrence** d'une suite arithmétique.

Suites arithmétiques

Remarque 1

Une suite arithmétique (u_n) est entièrement définie par la donnée de son premier terme u_0 et de sa raison r :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \text{Pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

C'est la définition **par récurrence** d'une suite arithmétique.

On peut cependant donner sa formulation explicite à partir de sa formulation par récurrence :

Théorème 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + n \times r$.
La réciproque est vraie.

Représentation graphique d'une suite arithmétique

On peut énoncer : **les suites arithmétiques sont exactement les suites de terme général** $\boxed{u_n = an + b}$. On a : $\underline{r = a}$ et $\underline{u_0 = b}$.
Les points $M_n(n; u_n)$ sont donc situés sur la droite D d'équation $y = ax + b$.

Représentation graphique d'une suite arithmétique

On peut énoncer : **les suites arithmétiques sont exactement les suites de terme général** $\boxed{u_n = an + b}$. On a : $\underline{r = a}$ et $\underline{u_0 = b}$.
Les points $M_n(n; u_n)$ sont donc situés sur la droite D d'équation $y = ax + b$.

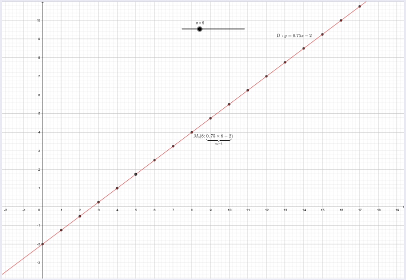


Figure: Suite arithmétique de premier terme -2 et de raison 0,75

Étude des termes d'une suite arithmétique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 + nr$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et r :

Étude des termes d'une suite arithmétique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 + nr$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et r : $u_n = u_0 + nr$

Étude des termes d'une suite arithmétique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 + nr$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et r : $u_n = u_0 + nr$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et r :

Étude des termes d'une suite arithmétique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 + nr$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et r : $u_n = u_0 + nr$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et r : $u_0 = u_n - nr$

Étude des termes d'une suite arithmétique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 + nr$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et r : $u_n = u_0 + nr$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et r : $u_0 = u_n - nr$
3. pour calculer la raison r connaissant n, u_0 et u_n :

Étude des termes d'une suite arithmétique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 + nr$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et r : $u_n = u_0 + nr$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et r : $u_0 = u_n - nr$
3. pour calculer la raison r connaissant n, u_0 et u_n : $r = \dfrac{u_n - u_0}{n}$

Suites arithmétiques

Étude des termes d'une suite arithmétique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 + nr$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et r : $u_n = u_0 + nr$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et r : $u_0 = u_n - nr$
3. pour calculer la raison r connaissant n, u_0 et u_n : $r = \dfrac{u_n - u_0}{n}$
4. pour calculer le **nombre de termes** $n\boxed{+1}$ connaissant u_0, u_n et r :

Suites arithmétiques

Étude des termes d'une suite arithmétique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 + nr$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et r : $u_n = u_0 + nr$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et r : $u_0 = u_n - nr$
3. pour calculer la raison r connaissant n, u_0 et u_n : $r = \dfrac{u_n - u_0}{n}$
4. pour calculer le **nombre de termes** $n\boxed{\mathbf{+1}}$ connaissant u_0, u_n et r : $\dfrac{u_n - u_0}{r} + 1$

Mise en garde

Ne confondez pas le nombre de termes $n+1$ et le nombre n de "sauts" de longueur r. Il y a toujours un terme en plus.

Exercice 2

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = -\frac{3}{4}$. Calculez u_{60}.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = -2$ et telle que $u_{15} = 3$. Calculez u_0.
3. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_0 = 1$ et $u_{30} = 241$. Calculez la raison r.
4. Voici les premiers termes d'une suite arithmétique de raison $r = \frac{2}{3}$ en partant de u_0 : $-1 \quad -\frac{1}{3} \quad 1 \quad \ldots \quad 45$.
   Calculez l'indice n du dernier terme 45 et le nombre de termes affichés.
5. **Prolongement** : Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_{14} = -6$ et $u_{50} = 48$. Calculez r, u_0 puis u_{100}.

Théorème 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors pour tous entiers naturels p et q : $u_q = u_p + (q - p)r$.

Théorème 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors pour tous entiers naturels p et q : $u_q = u_p + (q - p)r$.

Théorème 3 (somme des n premiers entiers naturels non nuls)

Soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites arithmétiques

Théorème 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors pour tous entiers naturels p et q : $u_q = u_p + (q-p)r$.

Théorème 3 (somme des n premiers entiers naturels non nuls)

Soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Corollaire : somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et n un entier naturel non nul. Alors :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Le corollaire en français

Le corollaire précédent peut s'écrire de manière plus générale, que l'on somme à partir de u_0 ou pas : **La somme de termes consécutifs** d'une suite arithmétique est égale à :

$$\boxed{(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

Le corollaire en français

Le corollaire précédent peut s'écrire de manière plus générale, que l'on somme à partir de u_0 ou pas : **La somme de termes consécutifs** d'une suite arithmétique est égale à :

$$\boxed{(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

Exercice 3

1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_9 = 20$ et $r = -4$. Calculez u_{30} et u_2.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_8 = 15$ et $u_{22} = 160$. Calculez r puis u_{50}.
3. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -12$ et de raison $r = 3$. Calculez $S_{40} = u_0 + \cdots + u_{40}$ puis $T = u_5 + \cdots + u_{55}$.

Suites arithmétiques

Théorème 4 : variations et limite d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. Si $r = 0$, alors (u_n) est constante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.
3. Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 4

Après avoir justifié proprement que les termes généraux ci-dessous sont bien ceux d'une suite arithmétique, précisez la limite de celle-ci :

1. $u_n = 0,01n - 100$
2. $u_n = -2n + 10^9$
3. $u_n = 8$

Nous allons nous donner deux ”situations standard” auxquelles nous nous proposons de répondre de manière théorique à l'issue de ce cours. En attendant, notre prospection pourra s'appuyer sur les TICE (tableur et programmation) qui se révéleront de précieux auxiliaires de recherche.

Nous allons nous donner deux "situations standard" auxquelles nous nous proposons de répondre de manière théorique à l'issue de ce cours. En attendant, notre prospection pourra s'appuyer sur les TICE (tableur et programmation) qui se révéleront de précieux auxiliaires de recherche.

Deux problèmes type

1. Une balle est lâchée du haut d'un tube en plexiglas mesurant dix mètres. Elle rebondit à chaque fois aux 4/5ème de sa hauteur précédente. On considère la balle immobile si son rebond est inférieur à 1 millimètre.
   Combien de rebonds aura effectué la balle avant de s'immobiliser et quelle distance aura-t-elle parcouru (au millimètre près) ?
2. Jean épargne *chaque mois* 100€ au **taux annuel** fixe de 1,5% (intérêts composés). De quelle somme disposera-t-il dans 3 ans et demi ?

Suites géométriques

Définition 1

Une suite (u_n) est **géométrique** si pour passer d'un terme au terme suivant, on multiplie toujours par une même constante q.

Mathématiquement parlant, les suites géométriques sont les suites (u_n) telles qu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = qu_n$.

Définition 2

La constante q précédente s'appelle la **raison** de la suite.

Suites géométriques

Définition 1

Une suite (u_n) est **géométrique** si pour passer d'un terme au terme suivant, on multiplie toujours par une même constante q.

Mathématiquement parlant, les suites géométriques sont les suites (u_n) telles qu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = qu_n$.

Définition 2

La constante q précédente s'appelle la **raison** de la suite.

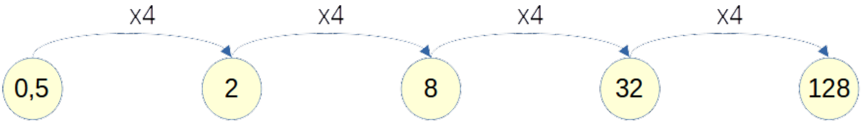


Figure: Suite géométrique de raison 4

Comment prouver qu'une suite est géométrique ?

1. Le *contexte* peut vous indiquer qu'on est en présence d'une suite géométrique. Il faut alors mathématiser ce dernier :

Suites géométriques

Comment prouver qu'une suite est géométrique ?

1. Le *contexte* peut vous indiquer qu'on est en présence d'une suite géométrique. Il faut alors mathématiser ce dernier :

   Exemple : Un article coûte 150€ en 2022. Chaque année il perd 10% de sa valeur. La suite des prix annuels de l'article est géométrique. Appelons u_n le prix de l'article l'année 2022+n. On a $u_0 = 150$€ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n = 0,9u_n$.
   On a une relation de récurrence du type $u_{n+1} = qu_n$, avec $q = 0,9$ indépendant de n. Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de premier terme 150 et de raison $q = 0,9$.

Comment prouver qu'une suite est géométrique ?

1. Le *contexte* peut vous indiquer qu'on est en présence d'une suite géométrique. Il faut alors mathématiser ce dernier :

   Exemple : Un article coûte 150€ en 2022. Chaque année il perd 10% de sa valeur. La suite des prix annuels de l'article est géométrique. Appelons u_n le prix de l'article l'année $2022+n$. On a $u_0 = 150$€ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n = 0,9u_n$.
   On a une relation de récurrence du type $u_{n+1} = qu_n$, avec $q = 0,9$ indépendant de n. Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de premier terme 150 et de raison $q = 0,9$.

2. On prouve que pour tout entier naturel n : u_{n+1} peut s'écrire sous la forme qu_n, avec q indépendant de n (constant).
   Cas fréquent : si l'on sait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on montre que ce quotient est constant.

Suites géométriques

Exercice 1 : géométrique ou pas ?

Déterminez, en le justifiant, les suites géométriques parmi les suites définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = 10n^2$
2. $v_n = (-2)^n + 7$
3. $w_n = 5\left(\frac{1}{6}\right)^n$
4. $t_n = \frac{3}{4}n$
5. $z_n = 5^{2n+1}$
6. La suite (h_n) des hauteurs atteintes par la balle du problème type 1 après n rebonds.
7. La suite (t_n) des tailles mensuelles d'un nénuphar qui gagne chaque mois 30% de sa taille précédente.

Remarque 1

Une suite géométrique (u_n) est entièrement définie par la donnée de son premier terme u_0 et de sa raison q :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \text{Pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

C'est la définition **par récurrence** d'une suite géométrique.

Suites géométriques

Remarque 1

Une suite géométrique (u_n) est entièrement définie par la donnée de son premier terme u_0 et de sa raison q :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \text{Pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

C'est la définition **par récurrence** d'une suite géométrique.

On peut cependant donner sa formulation explicite à partir de sa formulation par récurrence :

Théorème 1

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n$.
La réciproque est vraie.

Représentation graphique d'une suite géométrique

On peut énoncer : **les suites géométriques sont exactement les suites de terme général** $\boxed{u_n = \alpha \times \beta^n}$. On a : $\underline{u_0 = \alpha}$ et $\underline{q = \beta}$.

Suites géométriques

Représentation graphique d'une suite géométrique

On peut énoncer : **les suites géométriques sont exactement les suites de terme général** $\boxed{u_n = \alpha \times \beta^n}$. On a : $\underline{u_0 = \alpha}$ et $\underline{q = \beta}$.

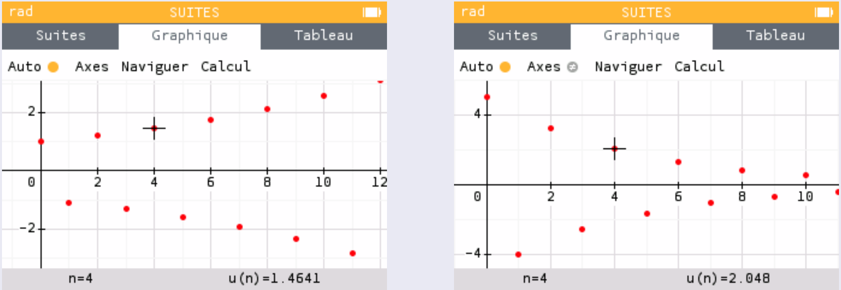
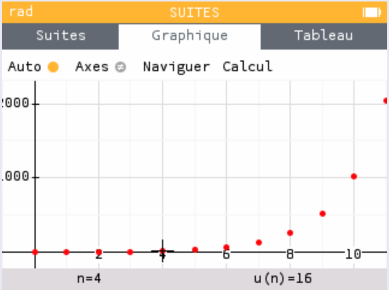


Figure: Suites de termes généraux $u_n = (-1,1)^n$ et $u_n = 5 \times (-0,8)^n$

Suites géométriques

Représentation graphique d'une suite géométrique



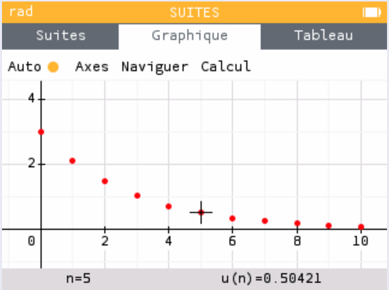


Figure: Suites de termes généraux $u_n = 2^n$ et $u_n = 3 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$

Théorème 2 : Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $\boxed{u_n = q^n}$.

1. Si $\mathbf{q < 0}$, alors (u_n) **n'est pas monotone**.

Théorème 2 : Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $\boxed{u_n = q^n}$.

1. Si $\mathbf{q < 0}$, alors (u_n) **n'est pas monotone**.
2. Si $q = 0$, alors la suite (u_n) est constante et tous ses termes sont nuls dès que $n \geq 1$. Par convention : $u_0 = 1$.

Suites géométriques

Théorème 2 : Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $\boxed{u_n = q^n}$.

1. Si $\mathbf{q < 0}$, alors (u_n) **n'est pas monotone**.
2. Si $q = 0$, alors la suite (u_n) est constante et tous ses termes sont nuls dès que $n \geq 1$. Par convention : $u_0 = 1$.
3. Si $\mathbf{0 < q < 1}$, alors (u_n) est **strictement décroissante**.

Théorème 2 : Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $\boxed{u_n = q^n}$.

1. Si $\mathbf{q < 0}$, alors (u_n) **n'est pas monotone**.
2. Si $q = 0$, alors la suite (u_n) est constante et tous ses termes sont nuls dès que $n \geq 1$. Par convention : $u_0 = 1$.
3. Si $\mathbf{0 < q < 1}$, alors (u_n) est **strictement décroissante**.
4. Si $q = 1$, alors (u_n) est constante et tous ses termes sont égaux à 1.

Suites géométriques

Théorème 2 : Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $\boxed{u_n = q^n}$.

1. Si $\mathbf{q < 0}$, alors (u_n) **n'est pas monotone**.
2. Si $q = 0$, alors la suite (u_n) est constante et tous ses termes sont nuls dès que $n \geq 1$. Par convention : $u_0 = 1$.
3. Si $\mathbf{0 < q < 1}$, alors (u_n) est **strictement décroissante**.
4. Si $q = 1$, alors (u_n) est constante et tous ses termes sont égaux à 1.
5. Si $\mathbf{q > 1}$, alors (u_n) est **strictement croissante**.

Suites géométriques

Théorème 2 : Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $\boxed{u_n = q^n}$.

1. Si $\mathbf{q < 0}$, alors (u_n) **n'est pas monotone**.
2. Si $q = 0$, alors la suite (u_n) est constante et tous ses termes sont nuls dès que $n \geq 1$. Par convention : $u_0 = 1$.
3. Si $\mathbf{0 < q < 1}$, alors (u_n) est **strictement décroissante**.
4. Si $q = 1$, alors (u_n) est constante et tous ses termes sont égaux à 1.
5. Si $\mathbf{q > 1}$, alors (u_n) est **strictement croissante**.

Il nous reste à étudier le cas général : toutes les suites géométriques ont un terme général de la forme $u_n = u_0 \times q^n$.
Quel est le rôle de u_0 ?

Corollaire

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \notin \{0;1\}$: $u_n = u_0 \times q^n$.

1. Si $q < 0$, alors (u_n) n'est pas monotone.
2. Si $0 < q < 1$, alors (u_n) est :
   - strictement décroissante si $u_0 > 0$.
   - strictement croissante si $u_0 < 0$.
3. Si $q > 1$, alors (u_n) est :
   - strictement croissante si $u_0 > 0$.
   - strictement décroissante si $u_0 < 0$.

Étude des termes d'une suite géométrique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 \times q^n$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et q :

Étude des termes d'une suite géométrique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 \times q^n$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et q : $u_n = u_0 \times q^n$

Étude des termes d'une suite géométrique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 \times q^n$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et q : $u_n = u_0 \times q^n$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et q :

Étude des termes d'une suite géométrique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 \times q^n$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et q : $u_n = u_0 \times q^n$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et q : $u_0 = \dfrac{u_n}{q^n} = u_n \times q^{-n}$

Suites géométriques

Étude des termes d'une suite géométrique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 \times q^n$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et q : $u_n = u_0 \times q^n$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et q : $u_0 = \dfrac{u_n}{q^n} = u_n \times q^{-n}$
3. pour calculer la raison q connaissant n, u_0 et u_n :

   Si n pair :

Étude des termes d'une suite géométrique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 \times q^n$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et q : $u_n = u_0 \times q^n$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et q : $u_0 = \dfrac{u_n}{q^n} = u_n \times q^{-n}$
3. pour calculer la raison q connaissant n, u_0 et u_n :

   Si n pair : $q = \text{sgn}(q) \times \left(\dfrac{u_n}{u_0}\right)^{1/n}$, où $\text{sgn}(q) = \begin{cases} +1 \text{ si } q > 0 \\ -1 \text{ si } q < 0 \end{cases}$

   Si n impair :

Suites géométriques

Étude des termes d'une suite géométrique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 \times q^n$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et q : $u_n = u_0 \times q^n$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et q : $u_0 = \dfrac{u_n}{q^n} = u_n \times q^{-n}$
3. pour calculer la raison q connaissant n, u_0 et u_n :

   Si n pair : $q = \text{sgn}(q) \times \left(\dfrac{u_n}{u_0}\right)^{1/n}$, où $\text{sgn}(q) = \begin{cases} +1 \text{ si } q > 0 \\ -1 \text{ si } q < 0 \end{cases}$

   Si n impair : $q = \left(\dfrac{u_n}{u_0}\right)^{1/n}$

Étude des termes d'une suite géométrique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 \times q^n$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et q : $u_n = u_0 \times q^n$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et q : $u_0 = \dfrac{u_n}{q^n} = u_n \times q^{-n}$
3. pour calculer la raison q connaissant n, u_0 et u_n :

   Si n pair : $q = \text{sgn}(q) \times \left(\dfrac{u_n}{u_0}\right)^{1/n}$, où $\text{sgn}(q) = \begin{cases} +1 \text{ si } q > 0 \\ -1 \text{ si } q < 0 \end{cases}$

   Si n impair : $q = \left(\dfrac{u_n}{u_0}\right)^{1/n}$
4. pour calculer n connaissant u_0, u_n et q :

Suites géométriques

Étude des termes d'une suite géométrique

Commençons par une remarque importante : la formule établie au théorème 1 : $u_n = u_0 \times q^n$ peut être vue de plusieurs façons :

1. pour calculer le terme u_n connaissant n, u_0 et q : $u_n = u_0 \times q^n$
2. pour calculer le terme u_0 connaissant n, u_n et q : $u_0 = \dfrac{u_n}{q^n} = u_n \times q^{-n}$
3. pour calculer la raison q connaissant n, u_0 et u_n :
   Si n pair : $q = \text{sgn}(q) \times \left(\dfrac{u_n}{u_0}\right)^{1/n}$, où $\text{sgn}(q) = \begin{cases} +1 \text{ si } q > 0 \\ -1 \text{ si } q < 0 \end{cases}$
   Si n impair : $q = \left(\dfrac{u_n}{u_0}\right)^{1/n}$
4. pour calculer n connaissant u_0, u_n et q : avec les TICE cette année !
   Avec le logarithme népérien en terminale.
   Et comme avant le nombre de termes de u_0 à u_n est égal à $n + 1$.

Exercice 2

1. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $q = -\frac{3}{4}$. Calculez u_{10}.
2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et telle que $u_8 = 1200$. Calculez u_0.
3. Soit (u_n) une suite géométrique positive telle que $u_0 = 2$ et $u_5 = 240$. Calculez la raison q.
4. Voici les premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 2$ en partant de u_0 : $0,25 \quad 0,5 \quad \ldots \quad 4096$.
   Calculez l'indice n du dernier terme 4096 et le nombre de termes affichés.
5. **Prolongement** : Soit (u_n) une suite géométrique de raison strictement négative telle que $u_{14} = 6$ et $u_{16} = 54$. Calculez q, u_0 puis u_{10}.

Théorème 3

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$. Alors pour tous entiers naturels m et n : $u_n = u_m \times q^{n-m}$.

Suites géométriques

Théorème 3

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$. Alors pour tous entiers naturels m et n : $u_n = u_m \times q^{n-m}$.

Théorème 4

Soit n un entier naturel non nul et q un réel. Alors :

1. Si $q = 1$: $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n = n + 1$
2. Si $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Suites géométriques

Théorème 3

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$. Alors pour tous entiers naturels m et n : $u_n = u_m \times q^{n-m}$.

Théorème 4

Soit n un entier naturel non nul et q un réel. Alors :

1. Si $q = 1$: $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n = n + 1$
2. Si $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Corollaire : somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et n un entier naturel non nul. Alors :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Suites géométriques

Le corollaire en français

Le corollaire précédent peut s'écrire de manière plus générale, que l'on somme à partir de u_0 ou pas : **La somme de termes consécutifs** d'une suite géométrique est égale à :

$$\boxed{\text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$$

Suites géométriques

Le corollaire en français

Le corollaire précédent peut s'écrire de manière plus générale, que l'on somme à partir de u_0 ou pas : **La somme de termes consécutifs** d'une suite géométrique est égale à :

$$\boxed{\text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$$

Exercice 3

1. Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_5 = 20$ et $r = -4$. Calculez u_{10} et u_1.
2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison négative, telle que $u_8 = 15$ et $u_{12} = 120$. Calculez q puis u_{20}.
3. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 3$. Calculez $S_{20} = u_0 + \cdots + u_{20}$ puis $T = u_5 + \cdots + u_{15}$.

Théorème 5 : Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $\boxed{u_n = q^n}$.

1. Si $\mathbf{q < 0}$, alors (u_n) **n'a pas de limite**.

Théorème 5 : Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $\boxed{u_n = q^n}$.

1. Si $\mathbf{q} < \mathbf{0}$, alors (u_n) **n'a pas de limite**.
2. Si $\mathbf{0} \leq \mathbf{q} < \mathbf{1}$, alors (u_n) **a pour limite $\mathbf{0}$**.

Théorème 5 : Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $\boxed{u_n = q^n}$.

1. Si $\mathbf{q < 0}$, alors (u_n) **n'a pas de limite**.
2. Si $\mathbf{0 \leq q < 1}$, alors (u_n) **a pour limite $\mathbf{0}$**.
3. Si $q = 1$, alors (u_n) a pour limite 1.

Théorème 5 : Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $\boxed{u_n = q^n}$.

1. Si $\mathbf{q < 0}$, alors (u_n) **n'a pas de limite**.
2. Si $\mathbf{0 \leq q < 1}$, alors (u_n) **a pour limite 0**.
3. Si $q = 1$, alors (u_n) a pour limite 1.
4. Si $\mathbf{q > 1}$, alors (u_n) **a pour limite** $+\infty$.

Exercice 4

Déterminez les limites des suites de terme général :

1. $u_n = 5 \times 3^n - 1000$.
2. $u_n = -2 \times 5^n + 100$.
3. $u_n = 10 \times 0,99^n + 4$.

Pour finir ...

On estime que la population d'un village augmente de 4% par an mais on estime également que chaque année 20 personnes quittent le village. En 2021 la population était de 3500 habitants.
On modélise cette population par une suite (u_n), où u_n représente le nombre d'habitants du village l'année $2021 + n$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Justifiez que la suite de terme général $v_n = u_n - 500$ est géométrique. Précisez sa raison.
3. Exprimez alors v_n en fonction de n.
4. En déduire u_n en fonction de n.
5. Quelle sera la population du village en 2026 ?
6. À partir de quelle année la population du village dépassera-t-elle 5000 habitants ?