Nombre dérivé - Dérivée d'une fonction

1 Introduction générale

1.1 Un peu d'histoire...

Dès la seconde moitié du 17ème siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connut une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral, traitant notamment de la notion d'infiniment petit et de son rapport avec les sommes dites intégrales.

C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du 17ème siècle, a le premier mené des études sur la notion de **tangente à une courbe** - lui-même les appelait « touchantes ». Le marquis de l'Hospital contribuera à diffuser le calcul différentiel de Leibniz à la fin du 17ème siècle grâce à son livre sur l'analyse des infiniment petits. Wallis, mathématicien anglais (surtout connu pour la suite d'intégrales qui porte son nom) contribua également à l'essor de l'analyse différentielle.

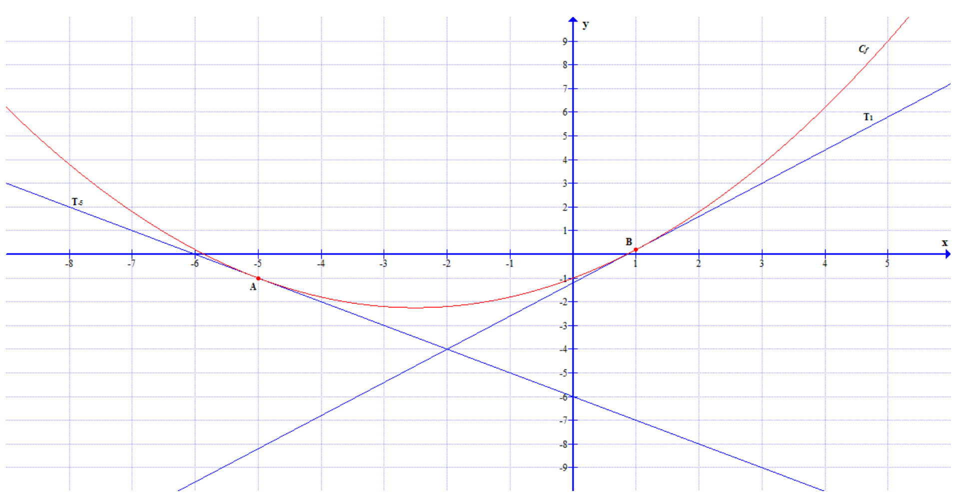
Jean Le Rond d'Alembert.
Néanmoins cette théorie tout juste éclose n'est pas encore, à l'époque, pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit introduite par Newton, qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable. C'est au 18ème siècle que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : $\mathbb{R}$ n'est pas encore construit formellement. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du 19ème siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

C'est à Lagrange (fin du 18ème siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x. C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

Source : wikipedia.fr

1.2 Nombre dérivé

Exercice de révision : On a tracé ci-dessous les tangentes à la courbe représentative d'une fonction f aux points A et B d'abscisses respectives -5 et 1. Déterminez **graphiquement** leurs coefficients directeurs.

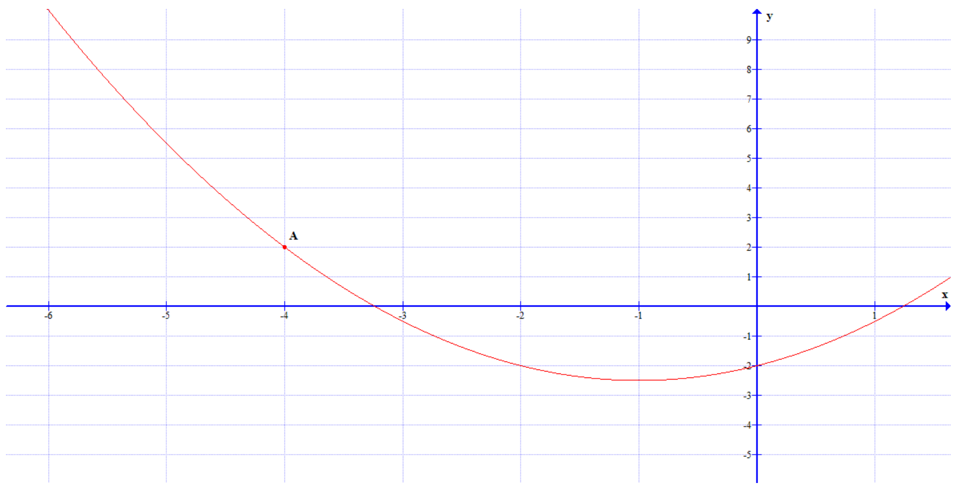


Définition heuristique : On dit qu'une fonction f a pour limite l en 0, et on note $\lim_{h \to 0} f(h) = l$ si pour h arbitrairement proche de 0, $f(h)$ prend des valeurs arbitrairement proches de l.

Exercice :

1. Dessinez le graphe d'une fonction f qui a pour limite 2 en 0.
2. Dessinez le graphe d'une fonction g qui n'a pas de limite en 0.

Exercice :
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $[-6; 1,5]$ par $f(x) = 0,5x^2 + x - 2$. A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -4.



1. Rappelez la formule qui permet de calculer le coefficient directeur d'une droite non verticale (AB).

2. M désigne un point de $\mathcal{C}$, dont l'abscisse sera notée x_M. Remplir le tableau suivant en arrondissant quand c'est nécessaire les résultats à 10^{-2} près.

x_M	0	-1	-2	-3	-3,5	-3,8
coefficient directeur de (AM)						

3. Vers quelle valeur ℓ semble tendre le coefficient directeur de (AM) lorsque le point M se rapproche de A (ce qui revient au même que dire $h = x_M - x_A$ se rapproche de 0) ?
4. Tracez la droite passant par A et de coefficient directeur l.
5. On note $\boxed{\ell = f'(-4)}$. Rappelons que -4 est l'abscisse de A. Déterminez graphiquement l'image $f(-4)$ de -4 par f.

$$\boxed{\text{Ainsi les notations } f(a) \text{ et } f'(a) \text{ désignent des quantités très différentes.}}$$

Théorème et définition : Soit f une fonction définie sur I (I désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles). Soit a un réel appartenant à I. On dit que f est **dérivable** en a s'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$. Ce réel ℓ est unique et se note $f'(a)$. C'est le **nombre dérivé** de f en a.

Cette définition semble bien théorique. C'est pourquoi nous allons en donner une interprétation concrète avec un mot à la clef; THE mot magique : VARIATION! Mais d'abord...

Théorème et définition : La droite passant par $A(a; f(a))$ et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$ s'appelle la **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a, et a pour équation : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

Remarque : Dans des cas simples, il est possible de déterminer l'équation d'une tangente (à condition qu'elle soit déjà tracée) ou d'avoir des informations sur elle... Sinon, la difficulté réside en le calcul effectif du nombre dérivé $f'(a)$. Dans la section suivante, vous serez en possession du "livre de recettes" adapté aux cas plus compliqués.

2 Fonction dérivée

Un film à gros budget (Blockbuster) donne toujours lieu à des produits dérivés, marketing oblige... Pour quelqu'un qui n'aurait pas vu ledit film, ces produits donnent des informations importantes : qui sont les personnages principaux, leurs liens éventuels, etc.
Partant d'une fonction f donnée, sa dérivée, si elle existe (Don't worry... ce sera toujours le cas en STAV), nous donnera des informations très précieuses sur la fonction de départ. Autrement dit, calculer une dérivée, c'est pour mieux appréhender la fonction que l'on a au départ. On reliera notamment deux notions très différentes : signe d'une expression avec variation d'une autre.

Interprétations du nombre dérivé

Exemple 1 :
Une voiture effectue un trajet de Montpellier à Perpignan. La distance entre ces deux villes est de 160 km.

1. Sachant que l'automobiliste a mis 1h40 pour effectuer le trajet, quelle était sa vitesse moyenne en km/h ?

2. Pour autant, la vitesse de la voiture a varié au cours du trajet : accélération, décélération, arrêt aux péages... Comment comprenez-vous le terme "**vitesse moyenne**" ?

3. Quel est l'indicateur de la "**vitesse instantanée**" ?

4. Généralisons ce qui précède. On appelle d la fonction définie sur $[0; +\infty[$ et qui à chaque instant t associe la distance parcourue $d(t)$ entre l'instant 0 et l'instant t. Donnez à l'aide de d l'expression de la vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2, puis celle de la vitesse instantanée à l'instant t_0.

Exemple 2 :
On verse du mercurochrome le long d'un fil absorbant, pas nécessairement homogène. Le mercurochrome se disperse ainsi dans le fil en étant plus ou moins concentré à certains endroits. Une fois l'équilibre atteint, on note $q(x)$ la quantité de mercurochrome présente sur le fil au point (en fait sur une très petite longueur autour du point) d'abscisse x.
La densité linéique c de mercurochrome mesure la quantité de mercurochrome (en moles) par unité de longueur (en m).

1. Quel sens donnez-vous à la densité linéique c ?

2. Si l'on note a une position sur le fil assimilé à une droite, trouvez une relation reliant q à c en a.

Le nombre dérivé exprime ainsi une variation instantanée d'une quantité.
Graphiquement, il s'interprète comme **la pente d'une tangente** en un point donné.

Si f désigne la quantité variant en fonction de la variable x, la variation instantanée en a se note $f'(a)$ ou encore $\frac{df}{dx}(a)$ ou parfois $\dot{f}(a)$.

2.1 Du nombre dérivé à la fonction dérivée

Définition : Si en chaque réel $x \in I$, $f'(x)$ existe, on définit une fonction de I dans $\mathbb{R}$, notée f' et appelée **fonction dérivée** de f.

Remarque : Une fonction dérivable est ainsi une fonction suffisamment "lisse". (Comment comprenez-vous ceci ?)

Exercice : Dessinez la courbe représentative de deux fonctions non dérivables en 0, mais pas pour les mêmes raisons.

2.2 Règles de dérivation

2.2.1 Dérivée des fonctions usuelles

On vous laisse marquer (très clairement) à droite du tableau sur quel(s) intervalle(s) les règles suivantes sont valables.

Si $f(x)$ est de la forme	alors $f'(x)$ est de la forme
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^n $(n \geq 1)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Exercice : Démontrez les trois premières lignes du tableau.

2.2.2 Règles opératoires

1. La somme de deux fonctions dérivables sur I est dérivable sur I.
2. Le produit de deux fonctions dérivables sur I est une fonction dérivable sur I.
   En particulier, on a le cas où l'une des deux fonctions est constante.
3. L'inverse d'une fonction dérivable sur I qui ne s'annule pas sur I est dérivable sur I.
4. Le quotient de deux fonctions dérivables sur I (dont celle au dénominateur ne s'annule pas) est une fonction dérivable sur I.
5. La composée d'une fonction dérivable sur I par une fonction affine à valeurs dans I est dérivable sur I.

De manière plus précise :

Si $f(x)$ est de la forme	alors $f'(x)$ est de la forme
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$
$ku(x)$ $(k\in\mathbb{R})$	$ku'(x)$
$\dfrac{1}{u(x)}$ $(u(x)\neq 0)$	$-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x)\neq 0)$	$\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v(x)^2}$
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$

Exercice : déterminez les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f_1(x)=10$ sur $I=\mathbb{R}$
2. $f_2(x)=-5x+4$ sur $I=\mathbb{R}$
3. $f_3(x)=\dfrac{4}{3}x+\sqrt{2}$ sur $I=\mathbb{R}$
4. $f_4(x)=\dfrac{5}{x}+10x^2$ sur $I=]0;+\infty[$
5. $f_5(x)=(-5x+2)(3x^2-4x+1)$ sur $I=\mathbb{R}$
6. $f_6(x)=x\sqrt{x}$ sur $I=]0;+\infty[$
7. $f_7(x)=\dfrac{4-7x}{3x+4}$ sur $I=\left]\dfrac{-4}{3};+\infty\right[$

2.3 Signe de la dérivée f' et variations de f

Le moment est venu d'énoncer le dernier théorème de ce cours et sa réciproque, qui se révélera d'une importance capitale ! De nombreux problèmes concrets en sont une illustration : optimisation en géométrie, en économie, en biologie, etc.

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

1. Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$.
2. Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.
3. Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$.

Mais le plus intéressant dans la pratique est la réciproque du théorème précédent.

Théorème (de Lagrange) : Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

1. Si pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$, sauf éventuellement en quelques valeurs où $f'(x)$ s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
2. Si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.
3. Si pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$, sauf éventuellement en quelques valeurs où $f'(x)$ s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Applications :

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$.
2. Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe.
3. En déduire les variations de f.

Même question avec $f(x) = 4x^2 - 3x - 2$ puis $g(x) = (2x-5)(x^2+4x+1)$ et $h(x) = -3x + 1 + \dfrac{1}{x}$.