Introduction aux processus aléatoires discrets 1

Yannick Le Bastard

14 août 2017

Résumé
Ce petit document, largement inspiré par les travaux d'Arthur Engel [2], a pour unique prétention de revisiter deux exercices du Concours C, mais en leur apportant un éclairage différent, notamment à travers la *modélisation* préalable des situations exposées, la *programmation* effective de scripts (en langage Python) et l'utilisation de *graphes probabilistes*. Il rejoint en cela l'enseignement de spécialité "mathématiques" du bac ES, mais va un peu plus loin au niveau théorique (niveau L1 ou L2 maximum). Les sujets exposés peuvent aisément être décortiqués afin de fournir une base pour un sujet de problème revisité. Mais revenons à l'essentiel ! L'intérêt d'étudier les graphes probabilistes et leurs matrices associées tient à un faible arsenal d'outils puissants permettant de résoudre de nombreux problèmes liés aux processus aléatoires discrets. Ils généralisent par ailleurs les arbres de probabilité dont l'utilisation aisée est familière aux élèves du secondaire.

1 Processus aléatoires discrets

Nous sommes habitués lors de la modélisation probabiliste d'un énoncé faisant intervenir une expérience aléatoire, d'introduire les notions d'univers, d'événement et de variable aléatoire (réelle ou vectorielle). Il en ressort néanmoins une impression statique de l'expérience aléatoire considérée. Le point de vue qui sera adopté ici est celui de la dynamique, avec une évolution dans le temps.
Considérons par exemple la trajectoire d'une poussière sur la surface d'une nappe d'eau. On peut découper cette surface en n carrés élémentaires puis observer la présence de la poussière dans chacun de ces carrés au cours du temps, qui lui-même peut être discrétisé. Nous obtenons alors ce que nous définirons plus loin comme un *processus aléatoire discret*. Ainsi, nous qualifierons plus volontiers l'univers Ω d'*espace des états*, en référence aux systèmes dynamiques, plutôt qu'ensemble des événements.
L'étude des transitions de la particule d'un état à l'autre a des représentations commodes : à l'aide de graphes orientés et pondérés ou bien matriciellement. Ces deux approches sont complémentaires et l'utilisation de l'une plutôt que l'autre dépend avant tout du cas considéré. Notons que généralement, il est préférable de commencer par l'approche graphe probabiliste avant de passer à l'approche matricielle dans un souci de visualisation des états et de leurs transitions.

1.1 Graphes probabilistes et matrices de transition

1.1.1 Arbres de probabilités

Nous sommes tous familiers de l'utilisation d'arbres de probabilités pour modéliser une situation dynamique : tirages successifs avec ou sans remise notamment. Rappelons les règles usuelles :

Règle 1 : La probabilité, partant d'un nœud donné de l'arbre de réaliser un parcours donné, est égale au produit de toutes les probabilités de transition (inscrites sur les segments) le long de ce parcours.

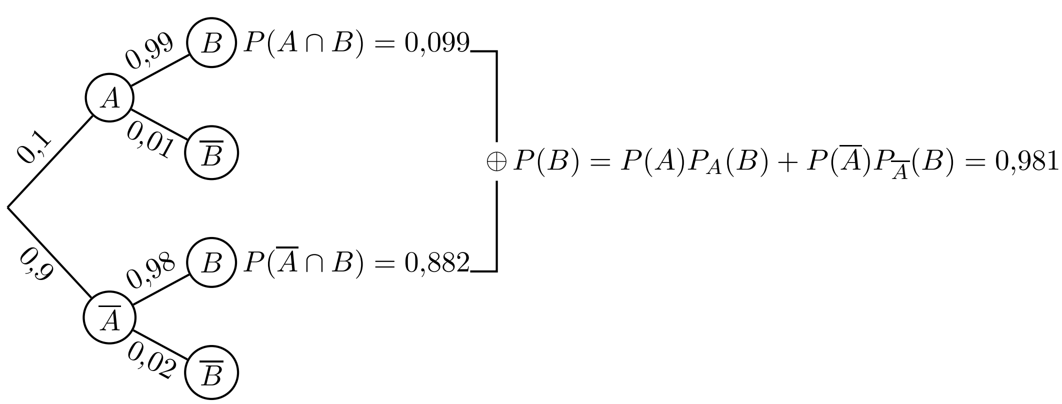
Règle 2 : La probabilité d'aller de A à B est la somme des probabilités de tous les chemins conduisant de A à B.

Règle 3 : La somme des probabilités des segments issus d'un même nœud est égale à 1.

Remarque 1-1-1-1 :

1. La règle 1 n'est rien d'autre que la traduction de la formule des probabilités composées : Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, alors :
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}P(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots A_n}(A_{n+1})$$
2. La règle 2 n'est que la traduction de $P(C) = \sum_{\{i; x_i \in C\}} P(x_i)$, où $\Omega = \{x_i \; ; \; i \in I\}$.
3. La règle 3 est la traduction de la formule des probabilités totales.

Exemple 1-1-1-2 :
Un détaillant achète ses produits chez deux fournisseurs dont le premier, noté A lui fournit 10% de ses articles. Parmi les articles fournis par A, 99% n'ont pas de défaut de fabrication : événement B. Parmi les articles fournis par le second fournisseur, 98% n'ont pas de défaut de fabrication.
On prélève au hasard un article du stock du détaillant. Calculez la probabilité qu'il n'ait pas de défaut de fabrication.



Le calcul sus-mentionné est une application immédiate de la formule des probabilités totales. Avantage de l'arbre : nous percevons la dynamique du processus ! Généralisons-donc un peu... de manière heuristique en gardant les mêmes règles de parcours.

1.1.2 Un exemple modèle

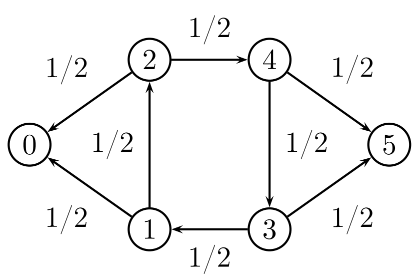
Yom suait à grosses gouttes. Faut dire qu'il n'avait pas fait les choses à moitié en marchant activement depuis le ministère de l'agriculture, situé à deux pas des Invalides. L'été parisien commençait tout juste à poindre le bout de son nez qu'il en avait asséché sa gorge. Vite, se

désaltérer... Une terrasse accueillante près de l'hôtel de ville lui tendait les bras. La chaise en osier craqua subrepticement lorsqu'il s'assit nonchalamment en étirant ses membres alourdis. Ses lèvres frémissantes saluèrent le demi pression qu'il savoura goulument... jusqu'au moment fatidique de l'addition ! Cinq euros !
"Bigre ! Diantre ! Purée de forficules ! Paris sera toujours Paris !" se dit-il en essuyant sa moustache du revers de l'index.
Il farfouilla dans sa poche pour y trouver sa bourse en cuir élimée par les ans. Mais celle-ci ne contenait plus qu'un seul et malheureux euro. En regardant le nom du troquet : "Pie et Matou", un frisson glacé parcourut son échine. Un de ses collègues venant d'Ardèche et dans la dèche y avait vécu un moment douloureux face aux trois taulières : Brigida, dite Bri la géomètre ; Christelle, dite Cricri l'arène, et Nathalie, dite Nath l'Aligot.
Mais les trois amazones semblèrent compréhensives lorsqu'il leur déclara ne pouvoir leur restituer leur dû qu'à hauteur d'un euro ; d'autant que les distributeurs alentours étaient en panne comme de par hasard !

- C'est pas grave mon biquet, déclara Brigida un sourire en coin. Je te propose un petit jeu qui va te plaire.
- Lequel ? demanda Yom les lèvres sèches.
- J'ai une pièce parfaitement honnête comme moi, dit Brigida d'un air entendu. Tu vas la lancer autant de fois que nécessaire pour gagner mon dû de cinq euros. Si tu fais Pile, tu gagnes la manche, sinon tu la perds. Voici les règles : tant que tu disposes d'un ou deux euros, tu joues ton pécule. Si tu as trois ou quatre euros, tu joues le complément à cinq euros... à moins que tu ne perdes entre temps. Mais si tu perds...
- Quoi ? interrogea Yom le regard hagard.
- Je réaliserai ton rêve d'artiste : tu entreras en Seine !

Yom sortit un papier de sa poche afin de calculer ses chances de rester au sec. Rien de tel qu'un bon petit graphe pour se détendre. Voici ce qu'il scribouilla :

L'état de départ est noté 1 (comme un euro, ce dont je dispose) et ceux de fin (appelés états absorbants) sont notés 0 et 5 (comme zéro et cinq euros). Entre-temps, je peux passer par les états 2, 4 et 3. En construisant le graphe petit à petit en fonction du résultat obtenu à chaque tour, j'obtiens donc :



Ok ! Ok ! Les chemins menant au gain sont ceux qui partant de 1 ont pour terminaison 5, soit :

- C_1 : $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$
- C_2 : $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5$

tout ceci précédé de n boucles, où n est un entier naturel éventuellement nul et la boucle le chemin $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$, de probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.
Bon, ça m'étonnerait que je boucle une infinité de fois, mais je dois quand même le prendre

en considération. Résumons donc tout ça...

$$P(\text{Gain}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{16}\right)^n \times \frac{1}{8}}_{n \text{ boucles suivi de } C_1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{16}\right)^n \times \frac{1}{16}}_{n \text{ boucles suivi de } C_2} = \frac{1}{5}.$$

Comme dirait Cambronne : M...E ! Ca sent la mise en bière tout ça ! marmonna Yom. Je suis vraiment mouillé dans une drôle d'histoire !
Ce n'était pas "Alain l'Amanite" à qui il avait mailé son problème qui allait le contredire. Sa simulation dont le script est donné ci-dessous arrivait inévitablement à la même conclusion !

```
def unePartie():
    somme=1                         #somme initiale du joueur
    while somme not in [0,5]:
        if somme in [1,2]:          #La mise qu'il va jouer en fonction
            mise=somme              #de la somme dont il dispose
        else:
            mise=5-somme
        alea=randint(1,2)
        if alea==1:                 #Cas ou le joueur gagne une manche
            somme=somme+mise
        else:
            somme=somme-mise
    if somme==5:                    #Test de gain de la partie
        return 1                    #1 si gain
    else:
        return 0                    #0 si perte

#Programme principal
from random import randint
G=0
N=int(input("Combien de parties ? "))
for i in range(N):
    G=G+unePartie()
print("Frequence de gain : ",G/N)
```

Même pour $N = 100000$, la fréquence de parties gagnées oscillait autour de 0,2 !
Yom se dit "Après tout, il fait chaud ! Et la Seine est saine !"

Toute ressemblance avec des faits ou des personnes existant ou ayant existé serait purement fortuite.

1.1.3 Vocabulaire

L'exemple précédent est déjà riche d'enseignement. Nous constatons en effet que les états 0 et 5 jouent un rôle particulier par rapport aux états 1, 2, 3 et 4. Une fois atteints, on y reste. Nous parlerons d'*états absorbants*.
Nous considérerons toujours ultérieurement une *suite* (ce qui suppose le temps discrétisé) d'expériences aléatoires dont les résultats, que nous appellerons états, appartiendront à un ensemble au plus dénombrable. Nous n'étudierons donc pas des processus continus. Restons discrets !

Définition 1-1-3-1 :

1. On note S l'ensemble des *états* qu'il est possible de visiter au cours de notre suite d'expériences aléatoires. On supposera que cet ensemble est fini ou infini dénombrable.
2. On appelle *probabilité de transition* de i vers j, et on note p_{ij} la probabilité de passer de l'état i à l'état j au cours d'un pas de temps. A priori, p_{ij} dépend de n et l'on devrait noter $p_{ij}(n)$, mais nous travaillerons uniquement sur des probabilités de transition indépendantes de l'instant considéré. cf 1-1-3-3.
3. Un état i est dit *absorbant* s'il vérifie $p_{ii} = 1$. On note B l'ensemble des états absorbants de S et on l'appelle *le bord* de S.
4. On appelle *état intérieur* un élément de $S \setminus B$.

Définition 1-1-3-2 :

- Définition naïve : La donnée de S, ensemble des états, des p_{ij}, probabilités de transitions entre états, ainsi que de l'état initial $(a_0, a_1, \dots)$ définit une *chaine de Markov*.
- Définition plus rigoureuse : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble S des états que l'on peut supposer égal à $\mathbb{N}$. On dit que cette suite est une *chaine de Markov* si pour tout entier $n \geq 1$ et toute suite $(i_0, \dots, i_{n-1}, i, j)$ d'éléments de S tel que $P(B_n) \overset{\text{def}}{=} P(X_0 = i_0 \cap \dots \cap X_{n-1} = i_{n-1} \cap X_n = i) > 0$, on ait $P_{B_n}(X_{n+1} = j) = P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$.
  On peut comprendre ceci comme : dans l'évolution au cours du temps, l'état du processus à l'instant $n+1$ ne dépend que de celui-ci à l'instant n précédent, mais non de ses états antérieurs. Le processus est *sans mémoire*.

Définition 1-1-3-3 :

1. Une chaine de Markov est dite *absorbante* si son bord B est non vide : il y a au moins un état absorbant.
2. Une chaine de Markov est dite *homogène* (en temps) si la probabilité $P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$ ne dépend pas de $n \geq 0$. On la note p_{ij} et on l'appelle *probabilité de transition* (en une étape) de l'état i à l'état j.

Remarque 1-1-3-4 : Dans cet article, nous étudierons les deux cas : chaines de Markov absorbantes, et chaines sans bord. Dans tous les cas, elles seront supposées homogènes.

Propriété 1-1-3-5 :

1. Pour tout couple d'entiers (i, j) on a $p_{ij} \geq 0$,
2. Pour tout $i \in S$, $\displaystyle\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$.

Remarque 1-1-3-6 : La propriété précédente ne dit rien d'autre que pour chaque $i \in S$, l'application $B \mapsto \sum_{j\in S} p_{ij}$ définit une mesure de probabilité sur S.

1.2 Outils calculatoires

1.2.1 Règles de parcours

Les règles présentées ici ont une importance pratique capitale ! La règle 3, dont nous donnerons une autre version ultérieurement, se différencie des deux autres qui sont identiques à celles présentées pour les arbres de probabilité, car elle permet de calculer non pas une probabilité, mais une durée moyenne de parcours $i.e$ une espérance.

Règle 1 : La probabilité, partant d'un état donné du graphe de réaliser un parcours donné, est égale au produit de toutes les probabilités de transition le long de ce parcours.

Règle 2 : La probabilité, partant d'un état intérieur i donné, d'atteindre un quelconque sous ensemble T du bord B est égale à la somme des probabilités de tous les chemins menant de i à T. Cette règle reste valable entre deux états intérieurs i et j.

Règle 3 : La durée moyenne m_i des parcours aléatoires allant de l'état i au bord B est la moyenne pondérée des longueurs des parcours de i à B, chaque longueur de parcours ℓ_k étant pondérée par la probabilité p_k de ce parcours.

Exemple 1-2-1-1 : Calculons à titre d'exemple la durée moyenne du jeu proposé par nos taulières parisiennes :
$n \in \mathbb{N}$ désignant le nombre de boucles, les chemins menant à B sont :

- $C_{1;n}$: n boucles $\longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$, de longueur $4n+3$ et de probabilité $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$,
- $C_{2;n}$: n boucles $\longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5$, de longueur $4n+4$ et de probabilité $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{n+1}$,
- $C_{3;n}$: n boucles $\longrightarrow 1 \longrightarrow 0$, de longueur $4n+1$ et de probabilité $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$,
- $C_{4;n}$: n boucles $\longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 0$, de longueur $4n+2$ et de probabilité $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$

On en déduit que le temps moyen d'absorption est égal à :

$$T_m = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{4n+4}{16}+\frac{4n+3}{8}+\frac{4n+2}{4}+\frac{4n+1}{2}\right]\left(\frac{1}{16}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{60n+26}{16}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

soit en utilisant les propriétés de la série géométrique rappelées dans la partie complément :

$$T_m = \frac{60}{16^2}\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} + \frac{26}{16}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{16}\right)^n = \frac{60}{16^2}\frac{1}{(1-1/16)^2}+\frac{26}{16}\frac{1}{1-1/16} = 2$$

Non seulement la probabilité de gagner à ce jeu est de 0,2 mais de plus, il dure en moyenne deux lancers !

Règles de la valeur moyenne Ces outils permettent de simplifier les règles de parcours présentées précédemment. Notamment la règle 3 de durée moyenne de parcours. On note $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble des états.

Définition 1-2-1-2 : On appelle *fonction de probabilité* la fonction définie sur S à valeurs dans $[0;1]$, qui à chaque état i associe sa probabilité d'être absorbée dans un sous-ensemble $T \subset B$. On la note $p_i^{(T)}$ où, si aucune confusion n'est à craindre p_i.

La formule des probabilités totales nous dit alors que pour tout état intérieur i :

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}p_k$$

Pour le bord : $p_i = 1$ si $i \in T$ et $p_i = 0$ si $i \in B \setminus T$.

Théorème fondamental 1-2-1-3 :

1. Première règle de la valeur moyenne : La valeur de la fonction de probabilité en un état intérieur i est la moyenne pondérée de ses valeurs en les états voisins de i.
2. **Seconde règle de la valeur moyenne** : La valeur du délai d'absorption en un état intérieur i est de 1 plus la moyenne pondérée des délais d'absorption en les états voisins.

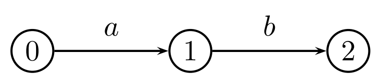
Remarques 1-2-1-4 :

1. Il est très formateur de chercher une preuve de la seconde règle de la valeur moyenne. Comme i est un état intérieur, on sait que le délai d'absorption m_i est au moins égal à 1. Le lecteur intéressé pourra consulter [2] au besoin.
2. Il arrive parfois que les transitions entre états n'aient pas la même durée. La seconde règle de la valeur moyenne doit alors être modifiée. Nous n'en parlerons pas ici.

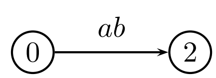
1.2.2 Réduction de graphes

Les premières et secondes règles de parcours nous permettent de simplifier avantageusement certains graphes probabilistes. Citons notamment :

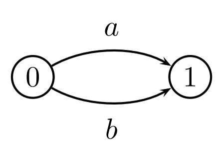
(a) Suppression d'un nœud : La règle 1 de parcours se traduit par :



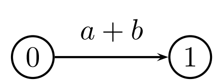
équivaut à :



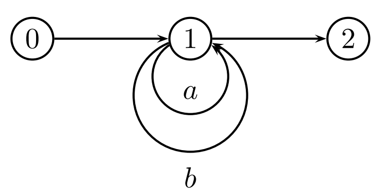
(b) Réunions de branches en parallèles : La règle 2 de parcours se traduit par :



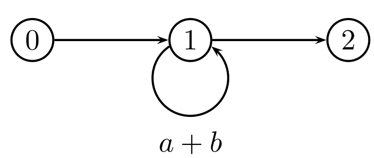
équivaut à :



(c) Réunions de boucles issues d'un même nœud : Ce n'est qu'un cas particulier de ce que nous avons vu en (b).

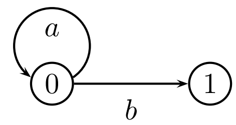


équivaut à :

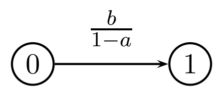


(d) Synthèse : Simplification de graphes faisant intervenir des boucles :

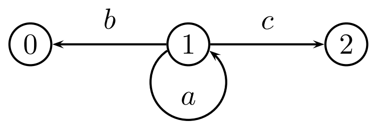
Cas fréquent 1 :



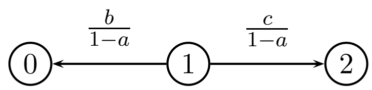
équivaut à :



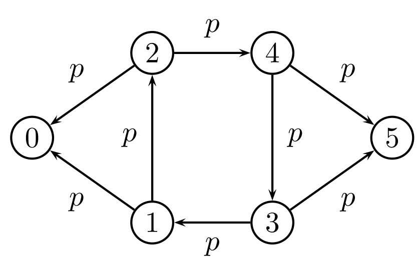
Cas fréquent 2 :



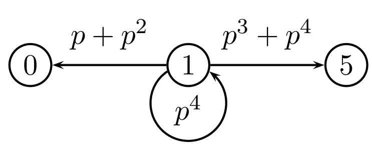
équivaut à :



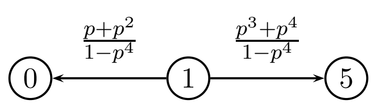
Appliquons ces résultats pour retrouver la probabilité de gain au jeu des taulières en simplifiant petit à petit le graphe. Nous poserons $p = 1/2$:



L'état 1 est fondamental.
Regroupons les branches $1 \to 0$ et $1 \to 2 \to 0$ de probabilités respectives p et p^2 qui mènent à l'état absorbant 0 ; les branches $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$ et $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5$ de probabilités respectives p^3 et p^4 qui mènent à l'état absorbant 5, sans oublier la seule boucle du graphe $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$, de probabilité p^4. Nous obtenons le graphe suivant :



lui-même équivalent à :



On en déduit $P(\text{Gain}) = \frac{p^3+p^4}{1-p^4} = 0,2$. Pas de surprise !

1.2.3 Matrices de transition

Définition 1-2-3-1 : Soit une chaîne de Markov à N états. On appelle *matrice de transition* de cette chaine la matrice $(\mathcal{P}) = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ des probabilités de transition entre deux états du graphe probabiliste associé.

Définition 1-2-3-2 : On appelle *matrice stochastique* une matrice carrée dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et dont la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

Remarque 1-2-3-3 :

1. La matrice de transition d'un graphe probabiliste est une matrice stochastique.
2. Une matrice stochastique M admet toujours 1 comme valeur propre à laquelle on peut associer le vecteur propre $\vec{V}$ dont toutes les composantes sont égales à 1.
3. Une matrice stochastique dont la somme des coefficients des colonnes est aussi égale à 1 est dite bistochastique.

Nous allons maintenant établir un résultat très utile concernant les chaines de Markov homogènes. Cette propriété, appelée relation de Chapman-Komolgorov, permet de relier les probabilités de transition en n étapes aux probabilités de transition en une étape.
On notera $(\mathcal{P}) = (p_{i,j})_{i,j \in S^2}$ la matrice de transition de la chaine de Markov étudiée.
Pour $n \geq 0$ et $(i,j) \in S^2$, on note $p_{i,j}^{(n)}$ la probabilité, partant de l'état i à l'instant 0 d'être dans l'état j à l'instant n i.e $p_{i,j}^{(n)} = P_{X_0=i}(X_n = j)$.
On pose également $\mathcal{P}^{(n)} := (p_{i,j}^{(n)})_{(i,j) \in S^2}$.

Théorème 1-2-3-4 : Pour tout entier $n \geq 0$, la matrice de transition en n étapes est égale à la puissance n-ième de la matrice de transition en une étape :

$$\boxed{\mathcal{P}^{(n)} = (\mathcal{P})^n}$$

Corollaire 1-2-3-5 : Pour tout entier $n \geq 0$, la matrice $\mathcal{P}^{(n)}$ est stochastique.

Corollaire 1-2-3-6 : Pour tout $(i,j) \in S^2$ et tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$p_{i,j}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{i,k}^{(m)} p_{k,j}^{(n)}$$

Citons maintenant un corollaire d'une utilité capitale :

Corollaire 1-2-3-7 : Notons $\vec{p_0}$ l'état initial du système et $\vec{p_n}$ son état après n transitions, tous deux écrits sous la forme d'un vecteur ligne de longueur Card(S). Alors

$$\boxed{\vec{p_n} = \vec{p_0}(\mathcal{P})^n}$$

Il y aurait encore beaucoup à dire sur la classification des états, la notion de temps d'attente, le conditionnement, ce qui dépasserait de loin le niveau de cet article. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [3] ou [4] par exemple.

Application au problème des taulières :
La matrice de transition du graphe peut s'écrire, en notant $p = 1/2$:

$$(\mathcal{P}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a noté sur les bords horizontaux et verticaux de la matrice les différents états.
Par hypothèse, l'état initial est $\vec{p}_0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$. En utilisant la corollaire 3-1-2-7, la probabilité de se retrouver dans l'état i à l'instant n est égale à :

$$\vec{p}_n = \vec{p}_0 (\mathcal{P})^n = e_2^T (\mathcal{P})^n$$

soit la seconde ligne de $(\mathcal{P})^n$. Un petit coup de pouce de XCas donne :

$$\vec{p}_n = [\frac{(-15-5*i)\left(\frac{-i}{2}\right)^n+(-15+5*i)\left(\frac{i}{2}\right)^n-50\left(\frac{1}{2}\right)^n+80}{100}, \frac{\left(\frac{-i}{2}\right)^n+\left(\frac{i}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4},$$
$$\frac{i\left(\frac{-i}{2}\right)^n+-i\left(\frac{i}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4}, \frac{-i\left(\frac{-i}{2}\right)^n+i\left(\frac{i}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4},$$
$$\frac{-\left(\frac{-i}{2}\right)^n-\left(\frac{i}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4}, \frac{(15+5*i)\left(\frac{-i}{2}\right)^n+(15-5*i)\left(\frac{i}{2}\right)^n-50\left(\frac{1}{2}\right)^n+20}{100}]$$

Les formules, qui font apparaître de "manière artificielle" des complexes se simplifient aisément (petit exercice de calcul rapide). en particulier, la probabilité d'avoir gagné au bout de n jets de pièces est égale à :

$$\frac{(15+5i)\left(\frac{-i}{2}\right)^n + (15-5i)\left(\frac{i}{2}\right)^n - 50\left(\frac{1}{2}\right)^n + 20}{100}$$

Exercice :

1. Déterminer en fonction de n la partie réelle de $(15+5i)\left(\dfrac{-i}{2}\right)^n$,
2. En déduire la probabilité de gain p_n au bout de n jets de dés.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$

1.2.4 Réduction de graphes et matrices de transition

L'objectif est ici d'examiner les liens entre les procédures de réduction des graphes et leur représentation matricielle.

Réunion de branches et de boucles parallèles : C'est une **étape préalable indispensable**. Tant qu'il y a des branches parallèles, nous n'avons pas affaire, en toute rigueur, à un graphe pondéré et une représentation matricielle n'est donc pas envisageable. Il convient donc en premier lieu d'utiliser cette règle.

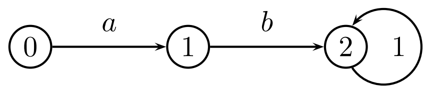
Soit M une matrice stochastique. Notons $\tilde{M} := \lim\limits_{n \to +\infty} M^n$ lorsque cette limite existe.

Théorème 1-2-4-1 : Si le bord B d'une chaine de Markov est non vide, la probabilité, partant d'un état intérieur quelconque, d'atteindre B est égale à 1.

Le but des procédés de réduction est de construire à partir d'un graphe G de matrice de transition $(\mathcal{P})$, le graphe $\tilde{G}$ de matrice $(\tilde{\mathcal{P}})$.
Remarquons qu'**une** matrice de transition est définie à permutation des sommets près. On ne peut donc en toute rigueur parler de **la** matrice de transition qu'une fois les sommets du graphe numérotés fixés une fois pour toute.

Suppression de nœuds et de boucles :

Suppression d'un nœud :



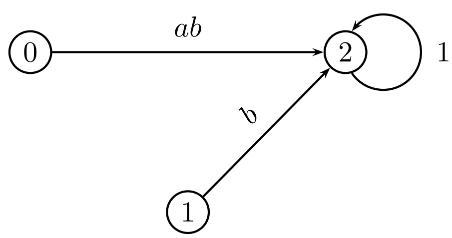
a pour matrice de transition :

$$(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

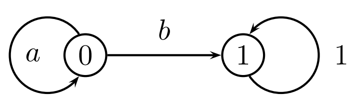
et pour tout entier $n \geq 2$:

$$(\mathcal{P})^n = (\mathcal{P})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $(\tilde{\mathcal{P}}) = (\mathcal{P})^2$. Le graphe $\tilde{G}$ est donc :



Suppression d'une boucle :



a pour matrice de transition :

$$(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

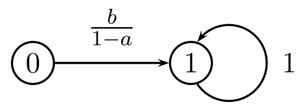
Un calcul simple nous amène à :

$$(\mathcal{P})^n = \begin{pmatrix} a^n & b\sum_{k=0}^{n-1} a^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et comme $0 < a < 1$, on a :

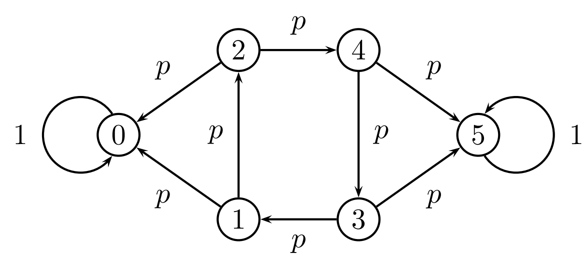
$$(\tilde{\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{1-a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $\tilde{G}$:

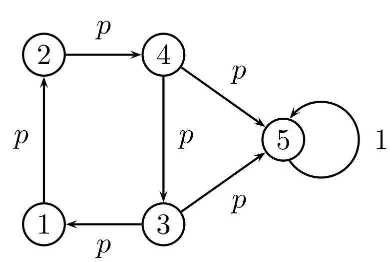


Nous pouvons remarquer que les matrices de transition sont des matrices d'application affine de $\mathbb{R}^n$.

Le jeu des taulières : Yom, l'esprit rafraichi par sa petite baignade se décida à reprendre le drôle de jeu des taulières à la lumière matricielle.



avec $p = 1/2$.
Si j'examine les chemins menant au sommet 5 j'obtiens le sous-graphe :



dont la matrice d'incidence est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a l'écriture par blocs : $M = \begin{pmatrix} V & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec $V = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ p \end{pmatrix}$

si bien que :

$$M^n = \begin{pmatrix} V^n & \left(\sum_{k=0}^{n-1} V^k\right) U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or $(Id - V)\left(\sum_{k=0}^{n-1} V^k\right) = Id - V^n$. D'autre part, si ma barbiche ne me trompe pas, la matrice $Id - V$ est inversible et bien évidemment $\lim_{n\to+\infty} V^n = 0$.
Dans ce cas précis, on a même $V^4 = p^4 Id$, donc :

$$(Id - V)(Id + V + V^2 + V^3) = (1 - p^4)Id$$

la limite étant assurée par le fait que $0 < p < 1$. D'où :

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & NU \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $N = \frac{1}{1-p^4}(Id + V + V^2 + V^3)$.
La partie du graphe issue de l'état 1 est donnée par la première ligne de NU, soit $\dfrac{p^3 + p^4}{1 - p^4}$.
Yes ! La boucle est bouclée !

Yom se dit que toutes ces réflexions qui avaient mis en ébullition ses neurones méritaient bien un rafraichissement. Pourquoi pas une petite bière ?

2 Concours C 2012

Cet exercice est une généralisation d'un problème issu du concours C 2012.
Chaque seconde, une particule se déplace dans $N+1$ compartiments numérotés de 0 à N selon la règle suivante :

- Si la particule est dans le compartiment 0, elle se déplace vers le compartiment 1 avec la probabilité 1,
- Si la particule est dans un compartiment $i \in [1, N-1]$, alors elle se déplace de manière équiprobable vers le compartiment précédent ou le compartiment suivant,
- Si la particule est dans le compartiment N, elle y reste (absorption)

Calculez le temps moyen de parcours.

2.1 Simulation informatique

Donnons de suite un programme qui demande à l'utilisateur de saisir le nombre de portes N séparant les compartiments et qui renvoie le temps moyen d'absorption de la particule. Ce-dernier est calculé sur un grand nombre d'expériences *temps* saisi par l'utilisateur. Nous avons pris ici *temps*=10 000.

```python
from random import *

def deplacements():
    abscisse=deplacement=0
    while abscisse<N:
        k=random()
        if abscisse==0:
            abscisse=abscisse+1
        else:
            if k<=0.5:
                abscisse=abscisse+1
            else:
                abscisse=abscisse-1
        deplacement=deplacement+1

    if abscisse==N:
        return deplacement

#Programme principal
N=int(input("Combien de portes voulez-vous disposer ? "))
temps=int(input("Sur combien de temps observer le mobile ? "))
j=0
deplacement_total=0
while j<temps:
    deplacement_total=deplacement_total+deplacements()
    j=j+1

print("Le mobile effectue en moyenne ",deplacement_total/temps," deplacements")
```

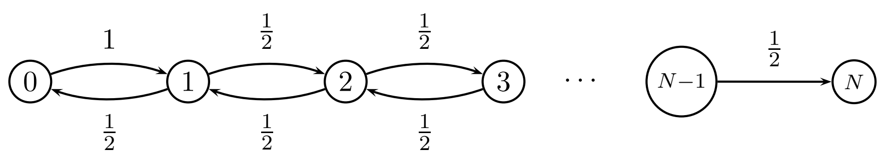
On obtient le tableau suivant :

N	Temps moyen de parcours
2	3.9722
3	8.9288
4	15.9898
5	24.9838
6	36.4928

Il semble que le temps moyen d'absorption de la particule soit d'environ N^2 secondes s'il y a N portes entre les compartiments.

2.2 Approche théorique

Le graphe modélisant le déplacement de la particule est aisé à construire à l'aide de l'énoncé :



Notons m_i le temps moyen d'absorption (la particule arrive dans le compartiment N) pour chaque état i. La seconde règle de la valeur moyenne et la condition de bord donnent :

$$\begin{cases} m_N = 0 \quad \text{(condition au bord)} \\ m_0 = 1 + m_1 \\ m_i = 1 + \dfrac{1}{2}(m_{i-1} + m_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq N-1) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} m_N = 0 \quad (1) \\ m_0 = 1 + m_1 \quad (2) \\ m_{i-1} - 2m_i + m_{i+1} = -2 \quad (1 \leq i \leq N-1) \quad (3) \end{cases}$$

Le lecteur pourra, au besoin consulter la partie compléments, paragraphe 4-2.
(3) définit une suite récurrente affine d'ordre 2, dont les solutions s'écrivent comme somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée :

$$(E_0) : m_{i-1} - 2m_i + m_{i+1} = 0 \quad (1 \leq i \leq N-1)$$

L'équation caractéristique associée à (E_0) s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ qui admet pour unique solution $x = 1$. Ainsi, les solutions de (E_0) sont de la forme $u_i = (Ai + B) \times 1^i = Ai + B$.
D'autre part, il est aisé de constater que $v_i = -i^2$ est une solution particulière de (3).
Ainsi, $m_i = Ai + B - i^2 \quad (1 \leq i \leq N-1)$.
On aimerait bien remplacer i par 0 dans l'expression précédente. Pour cela, on utilise la "ruse" classique suivante : on choisit m_{-1} tel que (3) soit vérifié en remplaçant i par 0 : $m_{-1} - 2m_0 + m_1 = -2$. Mais alors $m_0 = B$. Or $m_0 \overset{(2)}{=} 1 + m_1 = 1 + A + B - 1 = A + B$, d'où $A = 0$.
On en déduit que pour tout $0 \leq i \leq N-1$, $m_i = B - i^2$. Il reste à calculer la valeur de B.
Remplaçons i par $N-1$ dans (3) : $B - (N-2)^2 - 2(B - (N-1)^2) + \underbrace{m_N}_{=0} = -2$, ce qui conduit après un bref calcul à $B = N^2$.
Ainsi, $m_0 = N^2$, ce qui confirme les résultats obtenus dans la simulation précédente.

2.3 Commentaires et prolongements

Définition 2-3-1 : L'état 0 est dit *réfléchissant*. Une fois visité, on en ressort juste après avec la probabilité 1.

On pourrait aussi résoudre cet exercice en considérant des marches biaisées : la probabilité de se déplacer à gauche ℓ est différente de celle de se déplacer à droite r à chaque pas de temps. La méthode est la même.

Exercice 2-3-2 : Une particule se déplace chaque seconde depuis l'abscisse 0 de manière équiprobable vers la droite ou vers la gauche d'une unité sur un axe gradué de $-n$ à n. Les états $-n$ et n sont supposés absorbants. Calculez le temps moyen d'absorption.
Comparez avec le résultat obtenu au Concours C 2012. Justifiez de manière heuristique.

Voici maintenant un autre exemple qui aurait pu donner lieu à un joli problème du même type (**exercice-défi**) :

Exercice 2-3-3 : Une histoire de rencontre...
On étudie la première rencontre entre deux scarabées situés symétriquement sur un polygone à 2^p $(p \geqslant 2)$ côtés. Le jeu se déroule ainsi :

- À l'instant initial, deux scarabées sont situés symétriquement par rapport à O, centre d'un polygone régulier à 2^p côtés.
- Chaque seconde on lance une pièce pour chacun des scarabées. Si la pièce tombe sur pile le scarabée concerné tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, sinon il tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

1. Créez un script prenant pour argument p et qui renvoie le temps moyen de première rencontre. Il s'agit bien sûr de calculer une fréquence. On pourra par exemple effectuer 10 000 expériences.
2. Dessinez un graphe probabiliste modélisant le problème. Prouvez théoriquement que pour tout entier naturel $p \geq 2$, le temps moyen de rencontre T_p est égal à 2^{2p-3}.
3. Créez un script prenant pour argument p et qui renvoie pour 10 000 expériences le temps de première rencontre, qui sera indiqué en abscisse. En ordonnée sera indiquée la fréquence de chaque temps de rencontre. Testez le script pour $p = 3, 4, 5, 6$. En déduire la "forme" supposée de la distribution de la loi de T_p. Vérifiez sur une échelle logarithmique. Conclusion ?
4. Déterminez de manière théorique la loi exacte de T_p. Comparez avec les résultats obtenus expérimentalement.

3 Concours C 2017

Un étudiant passionné d'informatique a créé un programme générant une suite de nombres exclusivement composée de 0 et de 1 avec les conditions suivantes :

- les deux premiers nombres sont égaux à 1,
- si deux nombres consécutifs sont égaux à 1, alors le nombre suivant est égal à 1 avec une probabilité de $\frac{2}{3}$,
- si deux nombres consécutifs sont égaux à 0, alors le nombre suivant est égal à 0 avec une probabilité de $\frac{2}{3}$,
- si deux nombres consécutifs sont distincts, alors le nombre suivant est égal à 0 ou 1 avec équiprobabilité.

On note X_n la variable aléatoire égale au n-ième nombre généré par le programme.
Donner la loi de X_n pour $n \geq 3$ ainsi que l'espérance de X_n.

3.1 Simulation informatique

Voici comment aurait pu procéder l'étudiant pour générer sa suite :

```
def parcours(L,n):
    for i in range(n):          #n est le temps d'observation
        alea=random()
        if L[-2:]==[1,1]:       #On observe les deux derniers termes
            if alea<=2/3:       #et on choisit le terme suivant
                L.append(1)     #en respectant les donnees de l'exercice
            else:
                L.append(0)
        elif L[-2:]==[0,0]:
            if alea<=2/3:
                L.append(0)
            else:
                L.append(1)
        else:
            if alea<=1/2:
                L.append(0)
            else:
                L.append(1)
    return L

# Programme principal
from random import *
N=int(input("Combien de temps d'observation ? "))
liste=[1,1]                                  #Initialisation de la liste
print("liste : ",parcours(liste,N))
```

Pas vraiment besoin d'être passionné d'informatique pour créer ce script... Ceci dit, nous allons voir dès le paragraphe suivant qu'il nous sera nécessaire d'entrer dans la matrice !

Utilisons le script précédent pour simuler la loi de probabilité de X_n via l'approche fréquentiste. Nous calculerons par exemple les lois approchées de X_4 et de X_{10}. Nous gardons en stock la fonction parcours(L,n) définie précédemment ; $n \geq 1$ désigne toujours le nombre de transitions souhaitées.

```


#Programme principal
```

```python
from random import *
N=int(input("Nombre d'experiences ? "))
nb=int(input("Nombre de transitions par experience ? "))
N0,N1=0,0
for j in range(N):
    Liste=parcours([1,1],nb)
    if Liste[len(Liste)-1]==0:
        N0=N0+1
    else:
        N1=N1+1

print("P(X",nb+2,"=0) = ",N0/N)
print("P(X",nb+2,"=1) = ",N1/N)
```

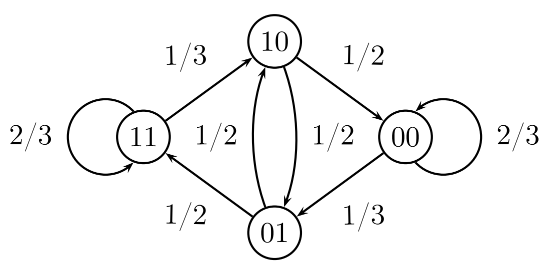
Avec N=100 000 expériences, nous obtenons le tableau suivant :

x_i	0	1
f_4	0,38983	0,61017
f_{10}	0,49765	0,50235

où f_i $(i = 4, 10)$ désigne la fréquence de 0 (resp. de 1) comme dernier chiffre après $i - 2$ transitions. Attention au décalage, le nombre de départ 11, est de longueur 2.

3.2 Approche théorique

Puisque les deux derniers chiffres obtenus déterminent entièrement le suivant avec les conditions citées, nous sommes amenés à définir naturellement quatre états : 11, 10, 01, 00. Les probabilités de transition sont données par l'énoncé. D'où le graphe probabiliste suivant :



Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Il est clair que $X_n(\Omega) = \{0; 1\}$.
L'état initial s'écrit 11 ; ainsi il faut $n-2$ transitions pour connaître le n-ième nombre généré par le programme. Essayons par exemple de calculer $P(X_n = 1)$. Nous devons additionner la probabilité de tous les chemins, qui, partant de l'état initial 11, arrivent au même état ou à l'état 01.
Seulement, le graphe est compliqué. Même en essayant d'utiliser les méthodes de réduction. Remarquons aussi qu'il n'y a aucun état absorbant. L'idée est donc d'utiliser l'outil matriciel. Numérotons les états 1, 2, 3, 4 pour 11, 10, 01 et 00, de sorte que la matrice de transition s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Notons $\vec{p}_n = (p_n^1, p_n^2, p_n^3, p_n^4)$ la probabilité d'atteindre chacun des états 1, 2, 3 et 4 au bout de n transitions. Par hypothèse $\vec{p}_0 = (1,0,0,0)$. On a la relation de récurrence $\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n A$. Une récurrence facile ou l'utilisation du corollaire 1-2-3-7 nous amène à $\vec{p}_n = \vec{p}_0 A^n$. Or $\vec{p}_0 = e_1^T$, où e_1 désigne le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On en déduit que $\vec{p}_n$ n'est rien d'autre que la première ligne de A^n.

Un petit coup de pouce de XCas nous donne directement la forme de A^n :

$$\begin{pmatrix}
\frac{-\left(-\frac{1}{3}\right)^n+6\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n+3}{10} & \frac{-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n+2\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n+2}{10} & \frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n+2}{10} & \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n+3}{10} \\
\frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{6}\right)^n+3}{10} & \frac{6\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n+2}{10} & \frac{-6\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n+2}{10} & \frac{-3\left(-\frac{1}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{6}\right)^n+3}{10} \\
\frac{-3\left(-\frac{1}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{6}\right)^n+3}{10} & \frac{-6\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n+2}{10} & \frac{6\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n+2}{10} & \frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{6}\right)^n+3}{10} \\
\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n+3}{10} & \frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n+2}{10} & \frac{-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n+2\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n+2}{10} & \frac{-\left(-\frac{1}{3}\right)^n+6\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n+3}{10}
\end{pmatrix}$$

Remarquons que $P(X_n = 0) = p_{n-2}^2 + p_{n-2}^4$ et $P(X_n = 1) = p_{n-2}^1 + p_{n-2}^3$.
On en déduit la loi de probabilité de X_n :

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{10}\left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 5\right]$$

et

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{10}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 5\right]$$

Nous en déduisons que $E(X_n) = P(X_n = 1) = \dfrac{1}{10}\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} + 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} + 5\right]$

Donnons les lois de probabilité de X_4 et de X_{10} :

x_i	0	1
$P(X_4 = x_i)$	0,3889	0,6111
$P(X_{10} = x_i)$	0,4984	0,5016

Les résultats obtenus à la simulation précédente rejoignent la théorie. Ouf...

4 Compléments

4.1 Petit point sur la série géométrique

On appelle ainsi la série entière définie sur $D =]-1;1[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Propriété 4-1-1 :

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et pour tout entier naturel p non nul, on a

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p}$$

2. Pour tout réel $x \in D =]-1;1[$, on a $f(x) = \frac{1}{1-x}$,
3. Pour tout réel $x \in D =]-1;1[$, on a $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ i.e $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

4.2 Suites récurrentes affines d'ordre 2

Nous ne rappellerons que l'essentiel qui nous intéresse dans cet article. Pour une preuve des résultats énoncés, on peut consulter :
https://fr.wikiversity.org/wiki/Approfondissement_sur_les_suites_numériques/Suites_récurrentes_d'ordre_deux

Considérons une suite réelle u définie par une relation de récurrence de la forme :

$$(E) \ : \ \begin{cases} u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = c \\ u_0, u_1 \ \text{ donnés} \end{cases}$$

Définition 4-2-1 :

1. u est appelée *suite affine linéaire d'ordre 2.*
2. Les suites définies par la relation $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ s'appellent *suites récurrentes linéaires d'ordre 2.*

Propriété 4-2-2 : L'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2.

Définition et Propriété 4-2-3 : L'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$ s'appelle *équation caractéristique* de (E_0) : $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$.

1. Si l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes α et β, alors les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n \ ; \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

2. Si l'équation caractéristique a une unique solution réelle α_0, alors les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$u_n = (An + B)\alpha_0^n \ ; \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

3. Si l'équation caractéristique a deux solutions non réelles (nécessairement conjuguées) : $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$u_n = A\alpha^n \cos(n\beta) + B\alpha^n sin(n\beta) \ ; \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Propriété 4-2-4 : Posons $P(X) = X^2 + aX + b$. Ainsi $P'(X) = 2X + a$.

1. Si $P(1) \neq 0$, alors $v_n = \frac{1}{a+b+c}$ est une solution particulière de (E).
2. Si $P(1) = 0$, nous distinguons deux sous-cas :
   a) Si $P'(1) \neq 0$ i.e $a \neq -2$, alors $v_n = \frac{cn}{2+a}$ est une solution particulière de (E),
   b) Si $P'(1) = 0$, alors $v_n = \frac{cn^2}{2}$ est une solution particulière de (E).

É nonçons maintenant le résultat le plus utile :

Propriété 4-2-5 : Toute solution de (E) s'écrit comme somme d'un élément de (E_0) et d'une solution particulière de (E).

5 Bibliographie

1. F. Comets, T. Meyre : Calcul stochastique et modèles de diffusion - Dunod
2. A. Engel : Processus aléatoires pour les débutants - L-Cassini
3. D. Foata - A. Fuchs : Processus stochastiques - Dunod
4. S. Méléard : Aléatoire - Les éditions de l'école polytechnique